

МЕТОДЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Метод квазибарьерных функций

Будем считать, что решаемая задача математического программирования по-прежнему имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{найти максимум } F(x) \text{ по } x \in E^n, \\ & \text{при условиях: } f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m] \end{aligned}$$

Напомним идею *метода штрафных функций*, в котором из целевой функции $F(x)$ вычитается функция $P(\tau, s)$, являющаяся "штрафом" за нарушение ограничения вида $s \leq 0$. Эффект штрафа обеспечивается тем, что $P(\tau, s)$ удовлетворяет при каждом фиксированном значении s предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0. \end{cases}$$

При этом поиск максимума вспомогательной функции осуществляется при *фиксированном* положительном значении параметра τ , однако его значение можно менять и использовать τ как регулятор меры штрафа за "единицу нарушения ограничения".

Тогда исходная задача математического программирования сводится к максимизации вспомогательная функция $A(\tau, x)$

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) .$$

Если $A(\tau, x)$ достаточно гладкая в E^n функция, имеющая при фиксированном $\tau > 0$ изолированную точку локального максимума $\bar{x}(\tau)$, то эта точка определяется равенством:

$$\text{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0,$$

координатное представление которого будет иметь вид:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_k}(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0 \quad \forall k = [1, n].$$

В этом случае

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) = F(x^*), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^*,$$

что позволяет использовать $A(\tau, \bar{x}(\tau))$ и $\bar{x}(\tau)$ как приближенные решения исходной задачи математического программирования.

Основной метода штрафных функций служит равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0. \end{cases}$$

Однако, оно является *достаточным, но не необходимым* элементом алгоритма.

На самом деле для предельных соотношений

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) = F(x^*), \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^*,$$

необходимо выполнение равенства

$$\text{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = o.$$

Последнее равенство можно получить и для функций $P(\tau, s)$, имеющих конечные предельные при $\tau \rightarrow +0$ значения, но удовлетворяющих условию

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0. \end{cases}$$

Примером такой функции, называемой *квазибарьерной*, может послужить

$$P(\tau, s) = \begin{cases} -\tau(-s)^{\frac{1}{r}}, & s < 0, \text{ при } r > 1 \\ +\infty, & s > 0. \end{cases}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу:

$$\begin{array}{l} \text{максимизировать} \quad 3\xi, \\ \text{при условии} \quad \xi \leq 2 \end{array}$$

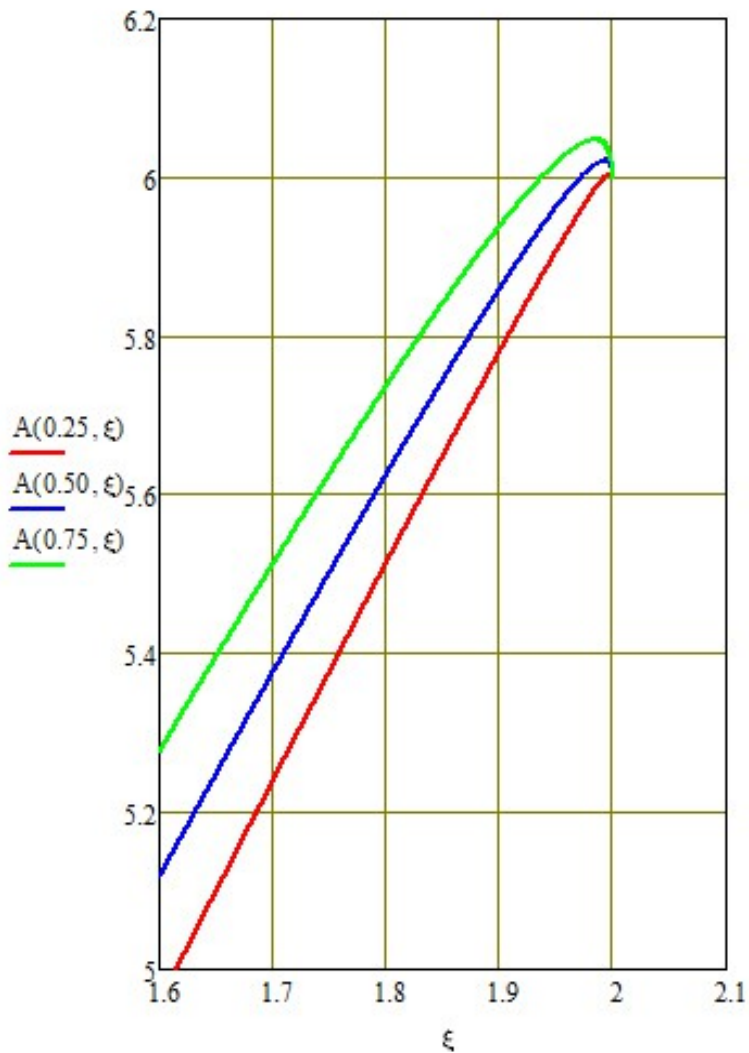
с квазибарьерной функцией $P(\tau, s) = -\tau\sqrt{-s}$

Здесь $s = -2 + \xi$ и вспомогательная функция будет иметь вид

$$A(\tau, \xi) = 3\xi + \tau\sqrt{2 - \xi},$$

условие стационарности которой

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = 3 - \frac{\tau}{2\sqrt{2 - \xi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\xi}(\tau) = 2 - \frac{\tau^2}{36}.$$



Метод функций обратных связей

Рассмотрим теперь другой способ сведения исходной задачи математического программирования к решению системы нелинейных уравнений с инструментальным параметром.

Пусть достаточно гладкая штрафная функция $P(\tau, s)$ кроме условия

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0, \end{cases}$$

удовлетворяет также и неравенствам

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0 \quad \forall s \in \mathfrak{R},$$

Заметим, что, например, стандартная квадратичная штрафная

функция вида $P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ \frac{s^2}{2\tau}, & s > 0 \end{cases}$ не удовлетворяет

этим условиям.

Если $A(\tau, x)$ достаточно гладкая в E^n функция, имеющая при фиксированном $\tau > 0$ изолированную точку локального максимума $\bar{x}(\tau)$, то неявно заданная функция $\bar{x}(\tau)$ определяется равенством:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_k} = 0 \quad \forall k = [1, n],$$

Из предположений о свойствах (в данном случае, непрерывной дифференцируемости) штрафной функции следует существование пределов

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \quad \forall i = [1, m].$$

Тогда из сравнения условия стационарности $A(\tau, x)$, записанное в форме

$$\text{grad } F(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial S}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) \cdot \text{grad } f_i(x) = 0$$

с утверждением теоремы Каруша–Куна–Таккера, о том, что существуют и единственны неотрицательные числа – множители Лагранжа $\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = [1, m]$ таких, что

$$\text{grad } F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \text{grad } f_i(x) = 0$$

можно прийти к заключению, что для изолированного локального решения исходной задачи математического программирования x^* справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial S}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) = \lambda_i^* \quad \forall i = [1, m]$$

Следовательно, величины $\frac{\partial P}{\partial S}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau)))$ можно использовать как приближенные оценки значений множителей Лагранжа.

Воспользуемся полученной оценкой для решения методом гладких штрафных функций следующей пары взаимодвойственных задач.

Пусть функции $F(x), f_i(x) \quad \forall i = \overline{1, m}$ линейны в E_+^n – неотрицательном ортанте E^n .

Тогда исходная (прямая) задача имеет вид

$$F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j \rightarrow \max \quad x \in E_+^n$$
$$\text{при условиях} \quad f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m},$$

где $\sigma_j, \beta_i, \alpha_{ij} \quad \forall j = \overline{1, n}, \forall i = \overline{1, m}$ – константы. Обозначим ее решение как $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_m^*)^T$.

Двойственная к исходной линейная задача в этом случае будет

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i \rightarrow \min \quad \lambda \in E_+^m$$
$$\text{при условиях} \quad g_j(\lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$. Решение двойственной задачи обозначим как $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)^T$.

Пусть вспомогательная функция прямой задачи

$$A_p(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) - \sum_{j=1}^n P(\tau, -x_j),$$

Для двойственной задачи вспомогательная функция (подлежащая минимизации) будет иметь вид

$$A_D(\tau, \lambda) = G(\lambda) + \sum_{j=1}^n P(\tau, -g_j(\lambda)) + \sum_{i=1}^m P(\tau, -\lambda_i)$$

Обозначим их экстремальные точки как:

$$\bar{x}(\tau) = \arg \max_x A_p(\tau, x) \quad \text{и} \quad \hat{\lambda}(\tau) = \arg \min_{\lambda} A_D(\tau, \lambda).$$

Предположим далее, что справедливы соотношения:

$$\xi_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tilde{\xi}_j(\tau) \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \hat{\lambda}_i(\tau) \quad \forall i = \overline{1, m},$$

так же как и

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \quad \forall i = \overline{1, m} \quad \text{и}$$
$$x_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\hat{\lambda}(\tau))) \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Для пары взаимодвойственных задач компоненты вектора λ^* это множители Лагранжа прямой задачи, а компоненты вектора x^* – множители Лагранжа задачи двойственной.

Однако, для фиксированного $\tau > 0$, вообще говоря,

$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))) \neq \hat{\lambda}_i(\tau) \quad \forall i = \overline{1, m} \quad \text{и}$$
$$\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\hat{\lambda}(\tau))) \neq \tilde{x}_j(\tau) \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Эти соотношения превращаются в верные равенства только при предельном переходе $\tau \rightarrow +0$.

Забудем теперь про метод штрафных функций и формально $\forall \tau > 0$ построим систему уравнений с неизвестными $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$ вида

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{x}(\tau))) & \forall i = \overline{1, m}, \\ \bar{\xi}_j = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\lambda}(\tau))) & \forall j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Можно показать, что эта система имеет решения для *любой* пары взаимодвойственных задач: совместных и несовместных, с единственным решением и с неединственным.

Заметим также, что в этой системе нет явных условий неотрицательности компонент $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$. Они здесь излишни, но почему?

Воспользуемся теперь тем, что непрерывная и строго монотонно возрастающая для $s \in (-\infty, +\infty)$ функция $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ имеет обратную функцию $Q(\tau, s)$. Эта функция $Q(\tau, s)$ также непрерывна и строго монотонно возрастает при $s \in (0, +\infty)$.

Тогда построенную систему можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\xi}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) & \forall i = \overline{1, m}, \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i = -Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) & \forall j = \overline{1, n}. \end{array} \right.$$

Заметим, что вид данной системы оправдывает использование термина функция обратной связи для функции $Q(\tau, s)$.

Примерами функций обратной связи могут служить:

$$1) \quad Q(\tau, s) = \tau \ln s \quad \text{для} \quad \frac{\partial P}{\partial s} = e^{\frac{s}{\tau}},$$

$$2) \quad Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad \text{для} \quad \frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{s}{\tau} \right)^2 + 1} + \frac{s}{\tau}.$$

Для перехода к нелинейному случаю введем новую вспомогательную функцию вида

$$U(\tau, x, \lambda) = L(x, \lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (*)$$

где $L(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right)$ – регулярная

функция Лагранжа прямой задачи, а $R(\tau, s) = \int_{\omega(\tau)}^s Q(\tau, u) du$.

Функция $\omega(\tau)$ определена как корень уравнения $Q(\tau, \omega(\tau)) = 0$, которое имеет решение и притом единственное при каждом фиксированном $\tau > 0$.

В этом случае векторы $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\lambda}(\tau)$ являются *стационарными точками* функции $U(\tau, x, \lambda)$ по компонентам векторов x и λ . Наконец, в терминах L и Q последняя система может быть записана как

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) & \forall j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) & \forall i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Функция Лагранжа для исходной нелинейной задачи записывается в виде

$$L(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

Этот формат не зависит от того, являются ли функции $F(x)$, $f_i(x) \quad \forall i = \overline{1, m}$ линейными или нет.

Поэтому естественно попытаться взять (*) в качестве определения вспомогательной функции $U(\tau, x, \lambda)$ в нелинейном случае. И рассматривать ее стационарные точки, то есть, решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = Q(\tau, \bar{\xi}_j(\tau)) & \forall j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau)) & \forall i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (!)$$

как приближенных решений исходной нелинейной задачи, для которых

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_j(\tau) = \xi_j^* \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}_i(\tau) = \lambda_i^* \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Построение и последующее решение системы (!) и является *методом функций обратных связей*