ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая постановка задачи параметрического программирования

Пусть $x \in E^n$ – вектор переменных и – вектор параметров являются элементами конечномерных евклидовых пространств соответственно с координатными представлениями $\| x \| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$ и $\| u \| = \left\| \begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \cdots \\ \nu_l \end{matrix} \right\|$.

Рассмотрим следующую задачу, которую принято называть *задачей параметрического программирования*:

найти $\max_x F(x,u)$ (1)

при условиях: $f_s(x,u) \le 0,\ s = [1,m]$, (2)

и пусть x_u^* есть решение задачи (1)–(2) для некоторого фиксированного $u \in \Omega \subseteq E^l$
.

Любую задачу, в формулировке которой используется , будем называть задачей *в пространстве параметров* или параметрической задачей *второго уровня*.

Например, задачу

$$\max_u F(x_u^*, u) \text{ при условии } . \qquad (3)$$

В отличие от задач типа (3), задачу (1)−(2) будем называть задачей *"первого уровня"*.

Следует отметить, что, хотя система задач (1)−(2) и (3) сводится к задаче математического программирования вида

$$\max F(x,u) \qquad (4{-}5)$$

при условиях

, ,

такое сведение может приводить к неприемлемому уровню усложнения задачи.

В качестве иллюстрации приведем следующий пример такой пары.

1. Задача *первого уровня* - задача линейного программирования с нелинейно входящими в ее условие параметрами, для которой $\| x \| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ и – координатные представления векторов и .

$$\text{Найти } \max_x 2\xi_1 + 3\xi_2 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \text{при условиях: } & \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \\ & \xi_1 + \nu_1 \xi_2 \leq 6, \\ & 2\xi_1 + \xi_2 \leq \nu_2, \end{aligned} \tag{7}$$

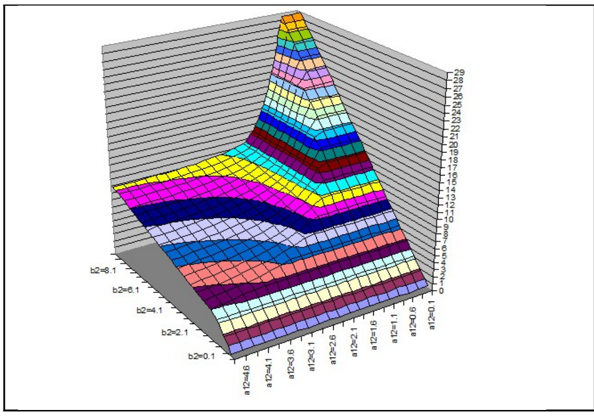
решение которой представляется зависимостями $\xi^*_{\nu_1,\nu_2}$ и .

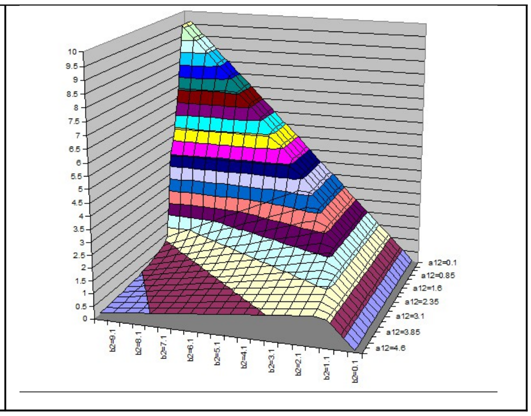
2. Задача *второго уровня*:

$$\max_u 2\xi^*_{1,\nu_1,\nu_2} + 3\xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2} \tag{8}$$

при условиях:

$$0.1 \leq \nu_1 \leq 5, \quad 0.1 \leq \nu_2 \leq 10 . \tag{9}$$





На этих рисунках приведены графические представления зависимостей

$$\max_u 2\xi^*_{1,v_1,v_2} + 3\xi^*_{2\,v_1,v_2} \qquad \text{и} \qquad \xi^*_{2\,v_1,v_2} \ \text{от}$$

– компонент вектора , которые позволяют заключить, что данные зависимости непрерывные, нелинейные, невыпуклые и не дифференцируемые для всех , а задача второго уровня имеет неединственное решение.

Свойства решений задач параметрического программирования

Пусть есть решение задачи (1)−(2) для фиксированного u, а задача второго уровня сформулирована в виде

$$\max_u F(x_u^*, u) \ , \tag{10}$$

где $F(x,u)$ – некоторая функция, зависящая как оттак и от .

Как постановка, так и процедура решения задачи (10) *могут* в значительной степени осложняться следующими специфическими свойствами зависимости .

1. Практической *невозможностью* (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи первого уровня (1)−(2), а, значит, также и постановки, исследования и решения в явном виде задачи второго уровня (10).
2. Несовпадением в общем случае области определения зависимости и множества , поскольку система условий задачи первого уровня (1)−(2) может оказаться *противоречивой* для некоторых $u \in \Omega \subseteq E^l$.
3. *Нефункциональностью* (неоднозначностью) зависимости для тех , при которых задача первого уровня (1)−(2) имеет решение, но не единственное.
4. *Негладкостью* зависимости в силу того, что условия задачи первого уровня (1)−(2) могут содержать ограничения типа *неравенство*. Более того, даже существование непрерывных производных у функций и достаточно высокого порядка не гарантирует необходимой гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости и, следовательно, входящих в формулировку задачи второго уровня условий.

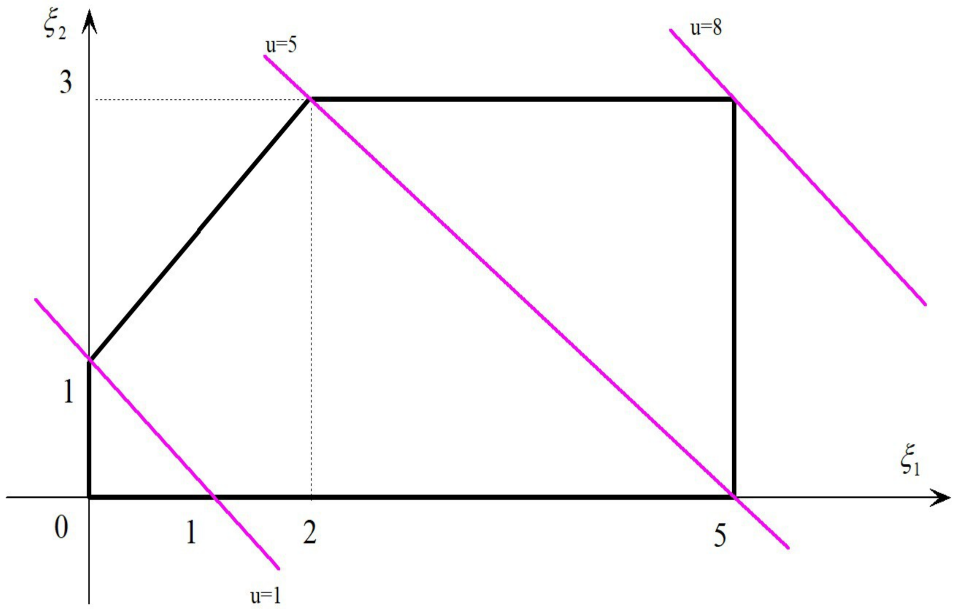
Эти свойства решений задач параметрического программирования могут существенно усложнить процедуру их поиска.

Причины, порождающие подобные свойства можно проиллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования:

$\forall u \in \mathbf{R}$ максимизировать по $x = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} \in E^2$ функцию $F = \xi_2$

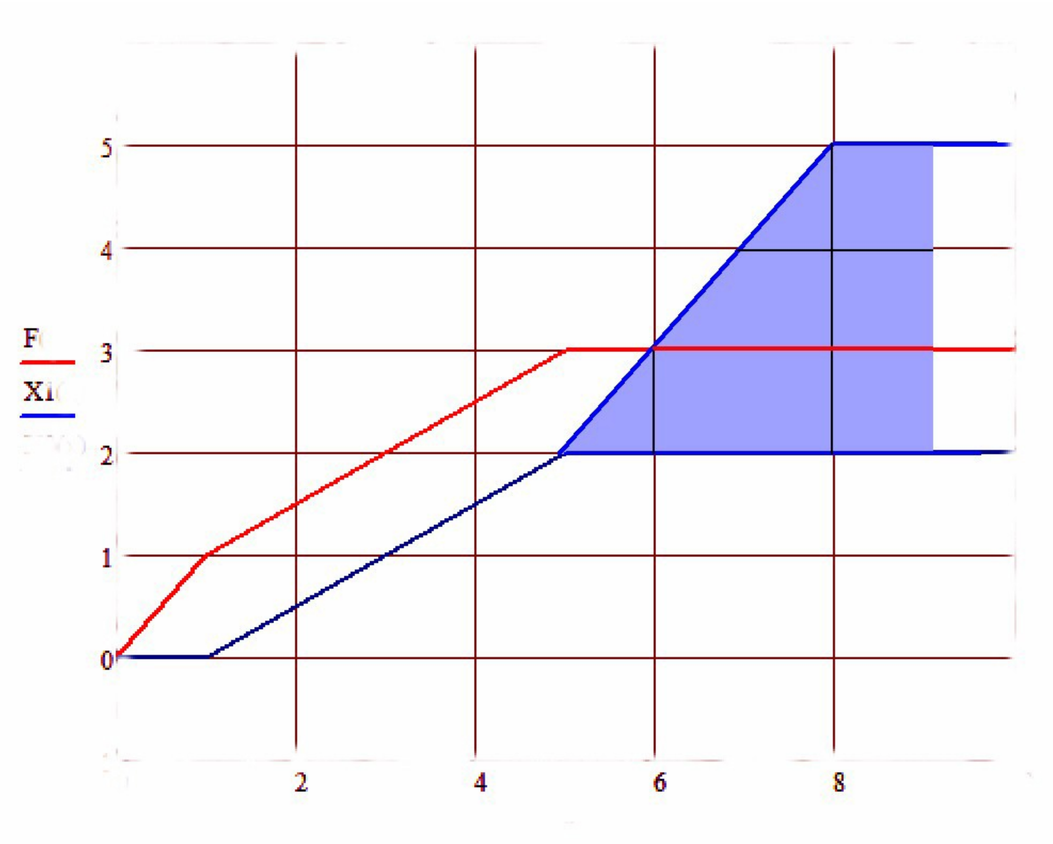
при условиях: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 5, & 0 \le \xi_2 \le 3, \\ \xi_1 - \xi_2 \le -1, & \xi_1 + \xi_2 \le u\ . \end{matrix}$



Геометрическая интерпретация задачи параметрического программирования.

Решение этой задачи представляется такими зависимостями

u	F_u^*	ξ_{1u}^*	ξ_{2u}^*
$(-\infty, 0)$	*не сущ.*	*не сущ*	*не сущ*
$[0, 1)$	u	0	u
$[1, 5)$	$\frac{u+1}{2}$	$\frac{u-1}{2}$	$\frac{u+1}{2}$
$[5, 8]$	3	$\forall[2, u-3]$	3
$(8, +\infty)$	3	$\forall[2, 5]$	3



Использование метода штрафных функций для построения сглаженных аппроксимаций решений задач первого уровня

Идея этого подхода заключается в замене зависимости достаточно гладкой и определенной для всех и любых положительных τ функцией , такой что $\lim_{\tau \to +0} \bar{x}(\tau, u) = x_u^*$,

В качестве аппроксимирующей зависимости предлагается использовать решение задачи первого уровня, получаемое методом *гладких штрафных функций*.

Как известно, решением задачи первого уровня (1)−(2) при использовании метода штрафных функций является

$$\bar{x}(\tau,u) = \arg\max_x A(\tau,x,u)\,, \tag{11}$$

где вспомогательная функция метода гладких штрафных функций выбирается следующего вида:

$$A(\tau,x,u) = F(x,u) - \sum_{i=1}^{m} P[\tau, f_i(x,u)]\ , \tag{12}$$

uде

$$\lim_{\tau\to+0} P(\tau,s) = \begin{bmatrix} +\infty, \ s > 0, \\ 0, \ s < 0 \end{bmatrix}$$

достаточно гладкая штрафная функция удовлетворяет также и неравенствам

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0 \quad \forall s. \tag{13}$$

Тогда – точку максимума вспомогательной функции можно найти из условия *стационарности* этой вспомогательной функции

$$\operatorname{grad}_x A(\tau,\bar{x},u) = o\,. \tag{14}$$

Теоретической основой предлагаемого подхода является использование локальных тейлоровских аппроксимаций зависимостей и теоремы о неявных функциях.

Если штрафная функция строго выпукла по для любых и, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам, то оказываются справедливыми следующие свойства.

1. Решение уравнений (14), являющихся условиями стационарности функции (12), , существует и локально единственно для любых и , и потому зависимость является функциональной.

2. Для зависимости верно равенство .

3. Если, наконец, функции и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то из теоремы о *неявных функциях*, примененной к условиям стационарности (14), следует непрерывная дифференцируемость функции по всем ее аргументам.

Принципиальную применимость рассматриваемого подхода продемонстрируем на следующем примере.

Максимизировать 3ξ при условиях $0 \le \xi \le u \quad \forall u \in \mathbf{R}$.

Построим вспомогательную функцию, использовав штрафную функцию:

$$A(\tau,\xi,u) = 3\xi - \tau\, e^{-\frac{\xi}{\tau}} - \tau\, e^{\frac{\xi-u}{\tau}} \tag{15}$$

Условие стационарности функции (15) по ξ для этой вспомогательной функции будет

$$3 + e^{-\frac{\bar{\xi}}{\tau}} - e^{\frac{\bar{\xi}-u}{\tau}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\xi}(\tau,u) = \tau \cdot \ln \frac{2}{\sqrt{9+4e^{-\frac{u}{\tau}}} - 3} \tag{16}$$

Нетрудно также показать, что имеют место предельные равенства:

$$\lim_{\tau\to+0} \bar{x}(\tau,u) = u \quad \text{при } u > 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau\to+0} \bar{x}(\tau,u) = \frac{u}{2} \quad \text{при } u < 0 .$$

График зависимости $\bar{\xi}(\tau,u)$ (формулы (16) для разных значений τ) показан на следующем рисунке. Здесь $B(u) = \lim_{\tau\to+0} A(\tau,u) \quad u \geq 0$.

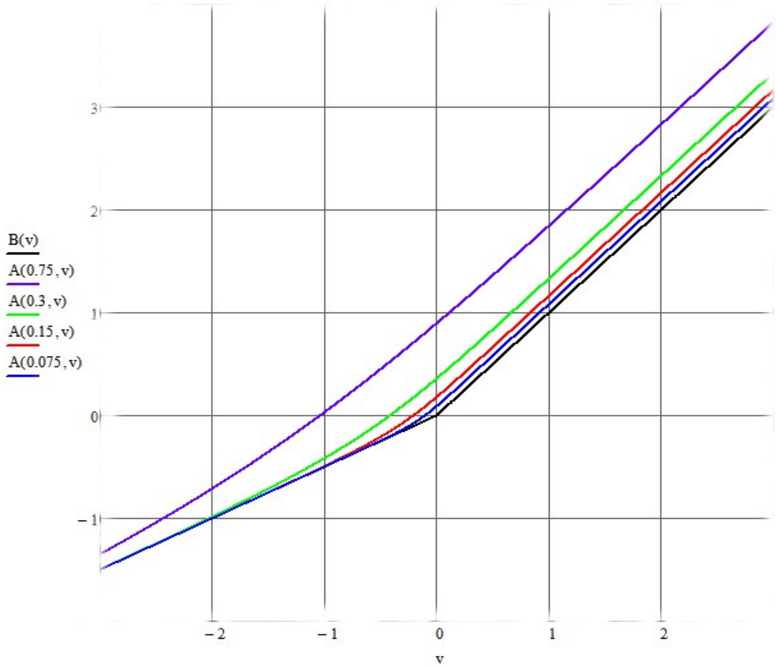


Схема решения задач параметрического программирования

Как известно, основное свойство метода штрафных функций состоит в том, что

$$\lim_{\tau \to +0} A(\tau, \bar{x}(\tau, u), u) = F(x_u^*, u),$$

где x_u^* − решение задачи (1)−(2). Поэтому в качестве целевого функционала, итерационная оптимизация которого позволяет получить оценку решения задачи второго уровня, можно принять .

Как было отмечено ранее, основным затруднением при реализации процедуры вида

$$u_{k+1} = u_k + \sigma_k w_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

является оценка – направления улучшающей вариации и – величины шага по данному направлению, а главным преимуществом − возможность использования численных методов, не требующих явного аналитического представления для

$$E(\tau, u) = A(\tau, \bar{x}(\tau, u), u).$$

Далее, если решение задачи второго уровня сведено к оптимизации функционала $E(\tau, u)$, то при фиксированном $\tau > 0$ для определения можно применить, например, метод Ньютона.

Данный метод, как известно, использует квадратичную тейлоровскую аппроксимацию, требующую значений как оптимизируемого функционала, так и его градиента и гессиана в точке $u_k \in \Omega \subset E^l$. Поскольку в данном случае функция определена неявно уравнениями

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_i} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial \xi_i} = 0 \quad \forall i = [1, n], \tag{18}$$

то для компонент градиента $E(r, u)$ мы имеем

$$E'_{\nu_j} = \frac{\partial A}{\partial \nu_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial \xi_i} \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \nu_j}, \ \forall j = [1, l],$$

а в силу (18) окончательно получаем

. (19)

Формула для компонент матрицы Гессе, будет несколько более сложной:

. (20)

Необходимые для использования (20) значения можно найти, решив систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \nu_t} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \nu_t} \qquad \forall j, t = [1, l], \tag{21}$$

которая получается при дифференцировании (18) по всем компонентам $u \in E^l$.

Наконец, оценки и находим, например, по формулам

$$\| w_k \| = -\| E'' \|^{-1} \| E' \| \qquad \text{и} \qquad \sigma_k = \arg\min_{\sigma > 0} E(u_k + \sigma w_k).$$