

## ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Термин '*задача оптимального управления*' используется для обозначения специального класса задач поиска условного экстремума, возникающих при исследовании объектов или процессов, описание которых обладает:

- *периодичностью*, т.е. повторяемостью в описании модели во времени, или в пространстве;
- возможностью разбиения набора количественных показателей, описывающих каждый период, на два подмножества:
  - показателей состояния (или *фазовых переменных*);
  - показателей управляющих воздействий (или *управлений*).

причем состояние объекта или процесса для некоторого периода *зависит* от состояний для других периодов, в то время как управление для каждого из периодов осуществляется *независимо*.

В тех случаях, когда под периодом понимается некоторый промежуток (или момент) *времени*, задачи данного класса принято называть '*динамическими*'.

Наконец, в зависимости от того является ли множество периодов счетным или нет, используется, уточняющее класс задачи, определение – '*дискретная*' или '*непрерывная*' задача.

### Дискретные динамические задачи

Рассмотрим  $N$ -периодическую модель, описываемую для каждого из периодов  $k = [1, N]$  совокупностью  $x(k)$  –  $n$ -компонентных векторов состояния и  $u(k)$  –  $r$ -компонентных векторов управления, удовлетворяющих как системе связей вида

$$x_j(k+1) = f_{jk}(x(k), u(k)), \quad j = [1, n], k = [1, N-1], \quad (1)$$

так и набору смешанных ограничений

$$g_{ik}(x(k), u(k)) \geq 0, \quad i = [1, m]; k = [1, N]. \quad (2)$$

Для этой модели возможна постановка задачи оптимального управления, заключающейся в определении натурального  $N^*$ , а также  $x^*(k) \in E^n$  и  $u^*(k) \in E^r$  ( $\forall k = [1, N]$ ), доставляющих экстремум функционалу

$$\Phi(x(1), \dots, x(N), u(1), \dots, u(N-1), N) \quad (3)$$

где функции

$$\begin{aligned} &\Phi(x(1), \dots, x(N), u(1), \dots, u(N), N), \\ &f_{jk}(x(k), u(k)) \quad \text{и} \quad g_{ik}(x(k), u(k)) \end{aligned}$$

непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Формально задача (1)-(3) является задачей *математического программирования*, методы решения которой существенно зависят от вида функций входящих в ее условие.

Например, мы можем рассмотреть специальный подкласс задач этого вида, называемых задачами *быстродействия* для *линейных* дискретных систем и имеющих следующую формулировку:

*найти минимальное число периодов* – натуральное  $N$ , а также *множества векторов состояний и управлений* ( т.е.  $x(k) \in E^n$  и  $u(k) \in E^r, k = [1, N]$  ), которые удовлетворяют как системе динамических связей

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + c(k), \\ \forall k &= [1, N-1] \end{aligned} \tag{4}$$

так и системе смешанных ограничений

$$\begin{aligned} D_j(k)x(k) + E_j(k)u(k) + g_j(k) &\geq 0, \\ \forall k &= [1, N], \forall j = [1, m] \end{aligned} \tag{5}$$

Для решения задачи (4)-(5) может быть использован метод перебора, следующего вида.

Если оказывается, что для некоторого  $N$  система (4)-(5) совместна, то значение этого пробного числа периодов уменьшается. Если же для данного  $N$  устанавливается факт несовместности системы (4)-(5), то значение  $N$  увеличивается и анализ совместности повторяется для нового значения  $N$ .

Процесс заканчивается, когда фиксируются два последовательных натуральных числа  $N^* - 1$  и  $N^*$ , таких, что система (4)-(5) несовместна для  $N^* - 1$  и совместна для  $N^*$ . То есть искомое минимальное  $N^*$  найдено.

### Непрерывные динамические задачи

Рассмотрим динамический (то есть, способный меняться непрерывно с течением времени) объект, *состояние* которого в некоторый фиксированный момент времени  $t \in [t_0, T]$  полностью и однозначно описывается упорядоченным набором чисел

$$\{ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \} \equiv x(t), \quad (6)$$

который можно считать элементом  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ .

Допустим также, что данный объект является *управляемым*, то есть, для каждого момента времени  $t \in [t_0, T]$  существует упорядоченный набор чисел

$$\{ u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t) \} \equiv u(t) \in E^r,$$

определяющих характер изменения состояния этого объекта.

Будем предполагать, что процесс изменения состояния рассматриваемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (7)$$

причем *кусочно-гладкие* вектор-функции  $x(t)$  и *кусочно-непрерывные* вектор-функции  $u(t)$  должны в каждый момент времени  $t \in [t_0, T]$  удовлетворять системе ограничений

$$g_s(x, u) \geq 0, \quad s = [1, m]. \quad (8)$$

Отметим, что, как и в дискретном случае:

- компоненты вектор-функции  $x(t)$  принято называть *фазовыми переменными* или просто – *фазами*, а пространство  $E^n$  – *фазовым пространством*;
- компоненты вектор-функции  $u(t)$  в этом случае называются *управлениями*, а пространство  $E^r$  – *пространством управлений*.

Различие между фазами и управлениями состоит в том, что только производные фаз (по времени) являются левыми частями уравнений (7).

Заметим также, что условия (8) могут реализовывать связь между  $x$  и  $u$ . Например, наличие в системе условий (8) уравнений вида  $u = b(x)$  позволяет выбирать управления в зависимости от состояния управляемого объекта. Такого рода ограничения в теории оптимального управления принято называть *обратными связями*.

Для модели (7)-(8) представляется естественной постановка следующей задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} & \text{найти вектор-функции } x^*(t) \in E^n \text{ и } u^*(t) \in E^r, \\ & \text{удовлетворяющие условиям (7)-(8)} \qquad \qquad \qquad \text{и} \\ & \text{доставляющие экстремум функционалу } \Phi(x, u, T). \qquad \qquad \qquad (9) \end{aligned}$$

Приведем пример такой задачи.

Пусть материальная точка массы  $m$  может перемещаться вдоль оси  $Ox$  под действием трех сил:

- ограниченной по модулю силы тяги  $u$ ,
- диссипативной силы трения  $\mu v$ , пропорциональной скорости движения  $v$ ,
- и упругой потенциальной силы  $kx$ .

Тогда согласно второму закону Ньютона движение точки будет определяться уравнением

$$m w = -\mu v - kx + u,$$

где  $w$  – ускорение точки.

Введем фазовые переменные

$x_1 = x$ , значение координаты точки на оси  $Ox$ , и

$x_2 = v = \dot{x}_1$  – скорость движения точки вдоль оси.

Поскольку ускорение точки  $w = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ , то для рассматриваемой модели система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\kappa}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 + \frac{1}{m}u. \end{cases} \quad (10)$$

при условиях:  $-c \leq u \leq c$ , где  $c$  – некоторая положительная константа.

Требуется найти вектор-функции  $x^*(t)$  и  $u^*(t)$  такие, что объект, описываемый условиями (8), переходит из исходного состояния  $x(0) = x^0$  в состояние  $x_1 = x_2 = 0$  за минимально возможное время  $T^*$ .

Это означает, что целевой функционал (9) в данном случае имеет вид:  $\Phi(x, u, T) = T \rightarrow \min$ .

Задачи оптимального управления с подобным целевым функционалом (как и в дискретном случае) принято называть задачами *быстродействия*.

Решение этой задачи может быть получено, например, методами, основанными на использовании *принципа максимума Понтрягина*.



Рассмотрим теперь схему решения задачи (7)-(8)-(9), основанную на идее *дискретизации времени* в линейных непрерывных задачах оптимального управления.

Пусть задача (7)-(8)-(9) формулируется, например, так

$$\begin{aligned}
 &\text{максимизировать по } \{x(t), u(t)\} && \int_0^T [(c(t), x(t)) + (f(t), u(t))] dt, \\
 &\text{при условиях:} && \dot{x} = A(t)x + B(t)u, && (11) \\
 &&& D(t)x + E(t)u \geq o, \quad \forall t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

где зависящие от времени матрицы  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  и вектор-функции  $x(t), u(t), c(t), f(t)$  имеют соответствующие друг другу размеры.

Дискретизацию по времени выполним очевидным способом

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad x^k = x(k \Delta t), \quad u^k = u(k \Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  – полное число периодов. В выражениях для производных значения дифференциалов заменяются на *приращения* соответствующих переменных.

Тогда задача (10) принимает вид

$$\text{максимизировать по } \{x^k, u^k\} \quad \sum_{k=0}^N ((c^k, x^k) + (f^k, u^k)),$$

при условиях

$$x^{k+1} - x^k = A^k x^k \Delta t + B^k u^k \Delta t, \quad (12)$$

$$D^k x^k + E^k u^k \geq 0, \quad \forall k \in [0, N-1].$$

Полученная задача (12) является обычной задачей линейного программирования, хотя и сравнительно высокой размерности.

Проиллюстрируем использование метода дискретизации времени в непрерывной задаче с динамическими связями (11) вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

Рассмотрим вначале классическую задачу Коши, то есть случай, когда матрица  $B(t)$  нулевая, при  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$ .

Здесь и далее были выбраны значения параметров:  $T = 7.5, \quad \Delta t = 0.01, \quad N = 750$ .

Общее решение этой однородной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix},$$

причем заданные начальные значения фазовых переменных достигаются при

$$C_1 = 3 \quad \text{и} \quad C_2 = C_3 = -2.$$

Еще раз отметим, что в этом случае задача (12) является задачей Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Графики решений задачи Коши приведены на рис. 1.

Использование схемы дискретизации времени для этой задачи дает аналогичные результаты, показанные на рис. 2.

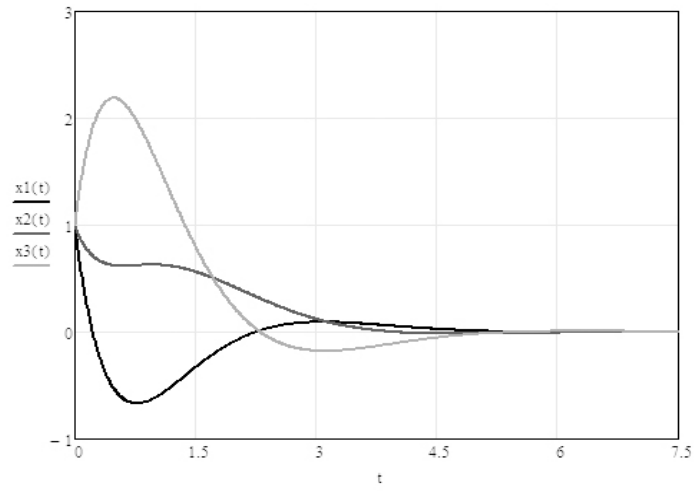


Рисунок 1.

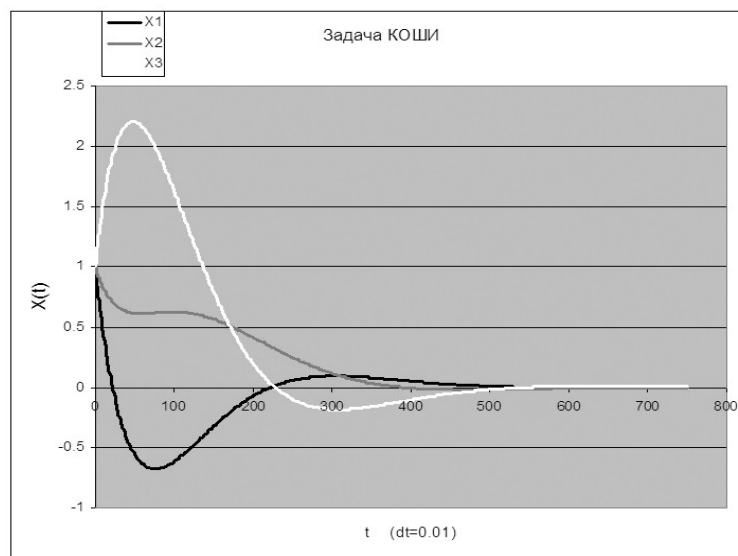


Рисунок 2.

Теперь приведем решения трех вариантов задачи оптимального управления, в которых начальные условия и ограничения на управления одинаковы

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1; \\ |u_1(t)| \leq 1; \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

но с различными ограничениями на фазовые переменные.

В первом варианте требуется построить оптимальные управления при граничном целевом условии вида  $x_1(T) \rightarrow \max$ . Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис. 3 и 4.

Для второго варианта обязательные граничные (краевые) условия на фазовые переменные имели вид  $x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 0.2$ . Графики соответствующих оптимальных решений показаны на рис. 5 и 6.

Третий вариант получается из первого тем, что к целевому краевому ограничению  $x_1(T) \rightarrow \max$  добавлены обязательные условия типа неравенств  $x_1(t) \geq -0.5, x_2(t) \geq -0.5, x_3(t) \geq -0.5, \quad \forall t \in [0, T]$ .  
Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис. 7 и 8.

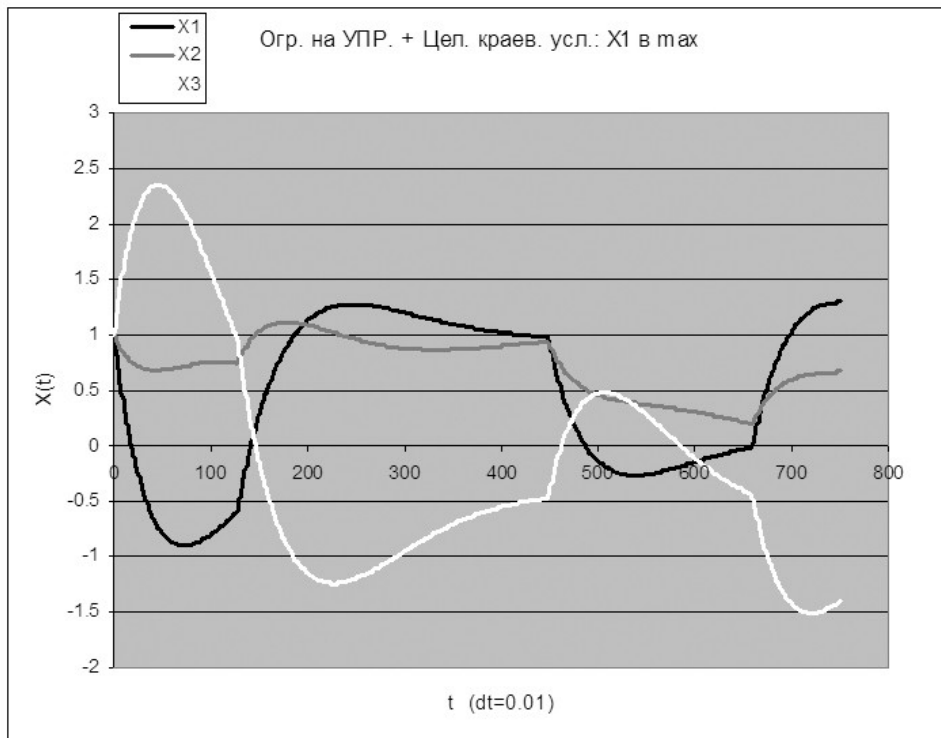


Рисунок 3.

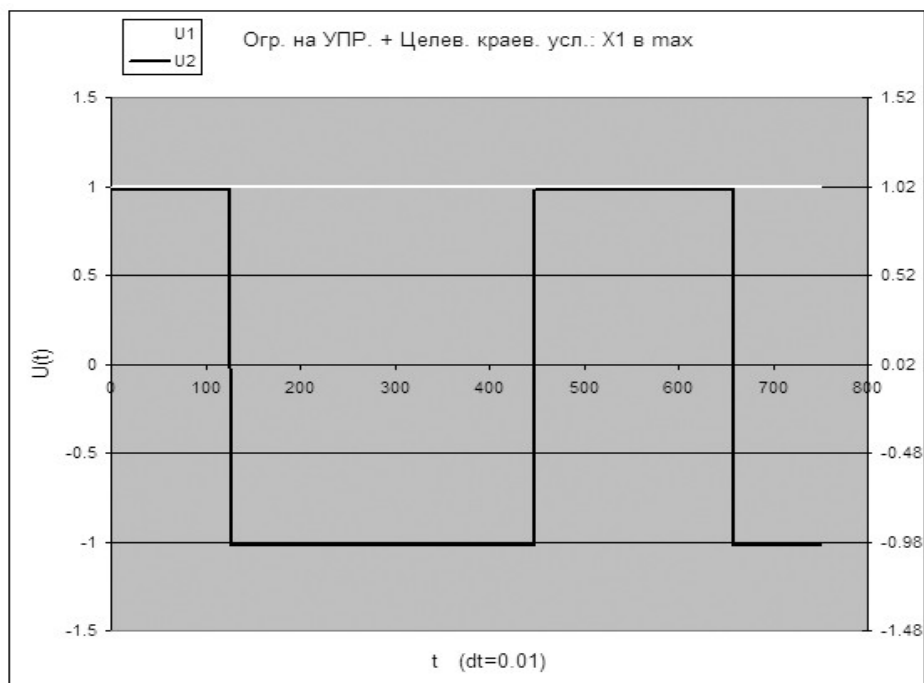


Рисунок 4.

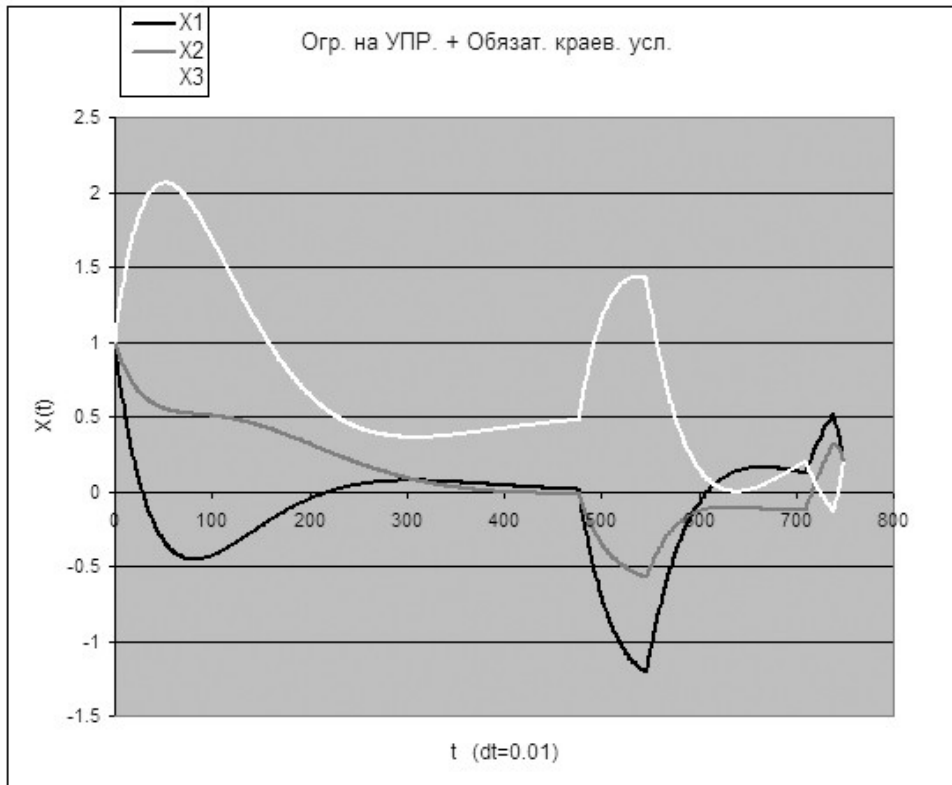


Рисунок 5.

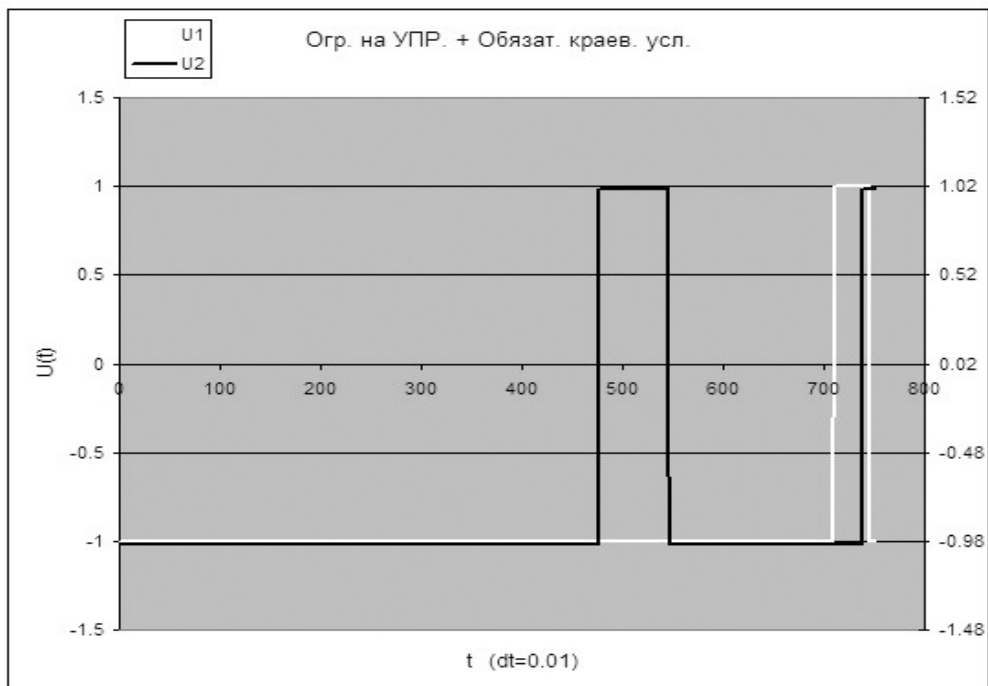


Рисунок 6.



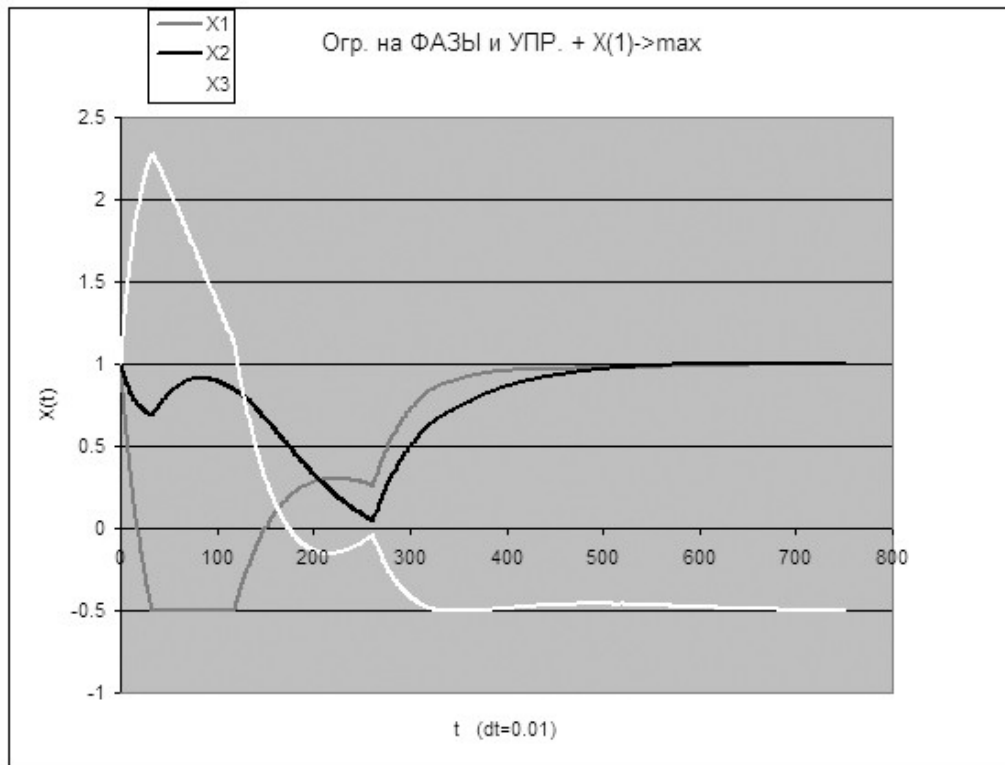


Рисунок 7.

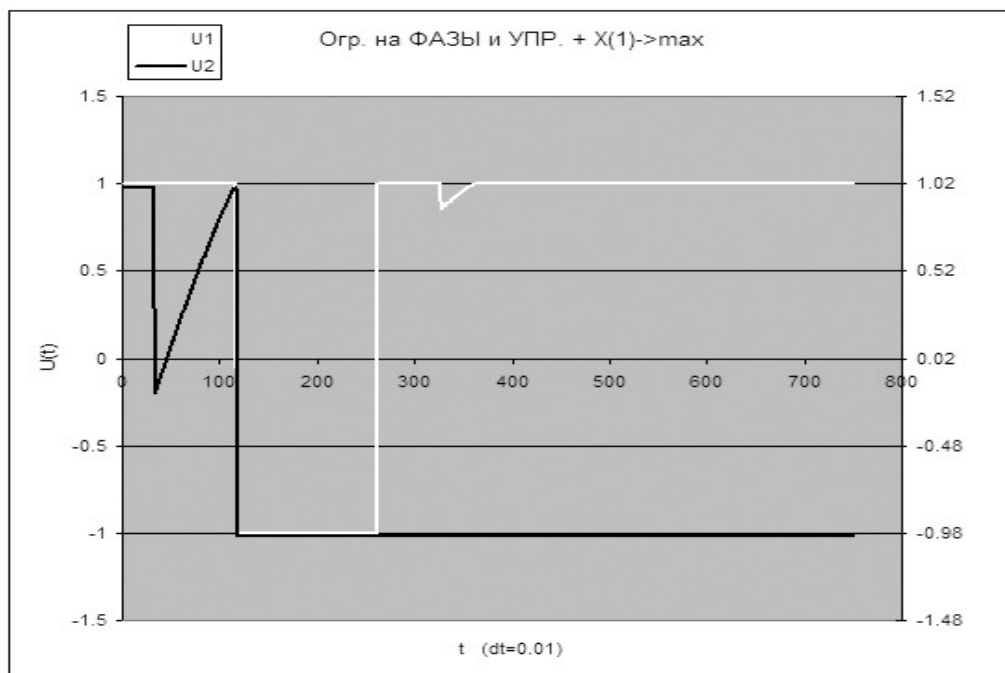


Рисунок 8.

Приведем без доказательства утверждение, что

*при отсутствии активных ограничений на фазовые (или смешанные) переменные, оптимальные управления находятся на своих граничных значениях, за исключением, быть может, точек «переключения».*

Этот факт иллюстрируют рис. 4, 6. и 8, на первых двух из которых управляющие переменные имеют свои граничные значения  $\forall t \in [0, T]$ , в то время как для третьего варианта (с фазовыми ограничениями) имеются интервалы времени, на которых оптимальные управления не находятся на своих границах.