ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Достаточно часто формализация отношений предпочтения для состояний моделируемого объекта порождает несколько независимых друг от друга целевых функционалов. По исторически сложившейся традиции в этом случае принято говорить о *многокритериальной модели* и даже о задачах многокритериальной (векторной) оптимизации, хотя такой термин очевидно логически противоречив.

Многокритериальной мы будем называть формализованную в E^n модель, имеющую K целевых функционалов

$$\text{максимизировать } F_{(k)}(x) \text{ по } x \in R \subset E^n, \qquad k = [1, K]$$

на множестве R − элементов x, удовлетворяющих условиям вида:

$$f_i(x) \le 0, \qquad i = [1, m].$$

Некорректность в общем случае постановки задачи, предполагающей поиск элемента оптимального для всех целевых функционалов очевидна, поскольку экстремальный для одного из целевых функционалов элемент, вообще говоря, не является таковым для других.

При этом, однако, возможно рассмотреть следующие однокритериальные задачи математического программирования:

$$\begin{array}{ll} \textit{максимизировать } F_{(k)}(x) & \\ \textit{при условиях}: \quad f_i(x) \le 0 , \quad i = [1, m] . \end{array} \tag{1}$$

где $x^*_{(k)}$ и $F^*_{(k)} = F_{(k)}\left(x^*_{(k)}\right)$ – их .решения, которые можно использовать для построения других оптимизационных задач.

Здесь следует отметить, что для многокритериальных моделей достаточно часто оказывается возможным разделение множества всех допустимых элементов $\{\, x \mid f_i(x) \leq 0\,, \quad i = [1, m]\,\}$ на два подмножества:

- для первого из которых *существуют* допустимые вариации, улучшающие *все* целевые функционалы *одновременно,*

- в то время как для второго подмножества *при любой* допустимой вариации имеется *хотя бы один* целевой функционал с ухудшающимся значением.

Определение 1.	Множество допустимых элементов, для которых при любой допустимой вариации, улучшающей значение хотя бы одного целевого функционала, имеется хотя бы один целевой функционал с ухудшающимся значением, называется *множеством конкурентного равновесия по Парето*, или просто *паретовским множеством.*

Задача 1. Найти множество Парето для многокритериальной модели:

максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2\}$ целевые функционалы

$$F_{(1)}(x) = 2\xi_1,$$

$$F_{(2)}(x) = 3\xi_2,$$

при условиях:

$$\xi_1 \ge 0,$$

$$\xi_2 \ge 0,$$

$$\xi_1 + \xi_2 \le 1.$$

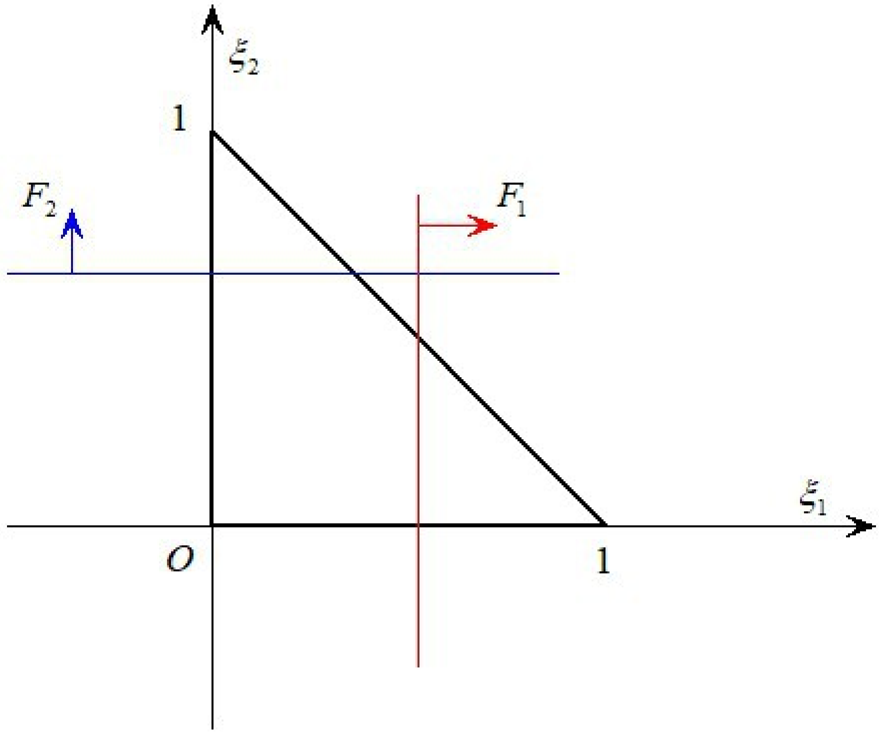

Рис. 1.

В процессе исследования многокритериальных моделей, обычно набор независимых целевых функционалов $F_{(k)}(x), \quad k=[1,K]$ заменяют одним, называемым иногда *сверткой*, переходя таким образом, к стандартной задаче математического программирования.

Наиболее простым примером свертки может служить задача максимизации линейной комбинации (с неотрицательными коэффициентами) исходных целевых функционалов

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k F_{(k)}(x)$$

в предположении, что каждый из них должен был максимизироваться.

Например, для многокритериальной модели из задачи 1 результатом использования такой схемы свертки будет задача математического программирования:

максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2, \lambda\}$ функционал

$$\Phi(x,\lambda) = (1-\lambda)\,F_{(1)}(x) + \lambda\,F_{(2)}(x) =,$$
$$= (1-\lambda)\,2\xi_1 + \lambda\,3\xi_2,$$

при условиях:

$$\xi_1 \geq 0,$$
$$\xi_2 \geq 0,$$
$$\xi_1 + \xi_2 \leq 1.$$

Другим, менее тривиальным примером построения свертки, являются задачи поиска минимума *параметра рассогласования* κ для следующей многокритериальной модели:

в E^n *найти максимальные элементы функционалов*

$$F_{(k)}(x) \text{ по } x \in R \subset E^n, \quad k = [1, K]$$

на множестве R элементов x*, удовлетворяющих условиям*:

$$f_i(x) \leq 0\,, \qquad j = [1, m]\,,$$

сводящиеся к задачам математического программирования следующего вида:

найти минимум κ *по совокупности* $\{\kappa, x\}$, *при условиях:*

$$\begin{aligned}
&\kappa \geq 0, \\
&F_{(k)}(x) \geq F_{(k)}(x^*_{(k)}) - \kappa\,, \quad k = [1, K], \\
&f_i(x) \geq 0\,, \quad i = [1, m];
\end{aligned} \tag{2}$$

в которых $x^*_{(k)}$ суть решения однокритериальных задач (1) , а $F_{(k)}(x^*_{(k)})$ − значения целевых функционалов.

Задачу (2) принято называть задачей минимизации *коэффициента рассогласованности* критериев κ (reference point method), а ее решение будем обозначать как $\{\kappa^+, x^+\}$.

Проиллюстрируем использование свертки данного вида на примере следующей многокритериальной модели.

Пусть в E^2 заданы целевые функционалы:

$$F_{(1)}(x) = \xi_1 + \xi_2 \to \max, \qquad F_{(2)}(x) = 2\xi_2 \to \max, \qquad F_{(3)}(x) = \xi_1 + 2\xi_2 \to \min,$$

которые надо оптимизировать при условиях:

$$\xi_1 \geq 1, \quad \xi_2 \geq 1, \quad \xi_1 + 3\xi_2 \leq 7.$$

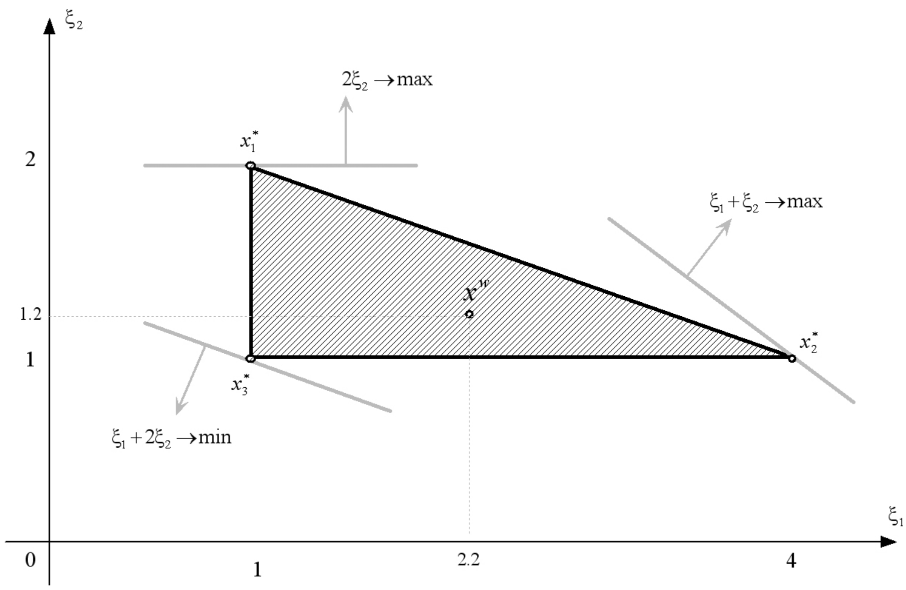

Рис. 2

Соответствующие однокритериальные задачи легко решаются, и мы находим, что

для задачи $F_{(1)}(x) = \xi_{1(1)} + \xi_{2(1)} \to \max$

при условиях: $\xi_{1(1)} \geq 1$, $\xi_{2(1)} \geq 1$, $\xi_{1(1)} + 3\xi_{2(1)} \leq 7$

$$\left\| x^*_{(1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \text{ с } F_{(1)}(x^*_{(1)}) = 5 .$$

Аналогично, для задачи $F_{(2)}(x) = 2\xi_{2(2)} \to \max$

при условиях: $\xi_{1(2)} \geq 1$, $\xi_{2(2)} \geq 1$, $\xi_{1(2)} + 3\xi_{2(2)} \leq 7$

$$\left\| x^*_{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\|, \text{ с } F_2(x^*_{(2)}) = 4 .$$

Наконец, для задачи $F_{(3)}(x) = \xi_{1(3)} + 2\xi_{2(3)} \to \min$

при условиях: $\xi_{1(3)} \geq 1$, $\xi_{2(3)} \geq 1$, $\xi_{1(3)} + 3\xi_{2(3)} \leq 7$

$$\left\| x^*_{(3)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \text{ с } F\ (x^*_{(3)}) = 3 .$$

Таким образом, задача определения наименьшего значения параметра рассогласования принимает вид:

найти минимум κ по совокупности $\{\kappa, \xi_1, \xi_2\}$
при условиях:

$$\kappa \geq 0,$$

$$\xi_1 + \xi_2 \geq F_{(1)}(x^*_{(1)}) - \kappa,$$

$$2\xi_2 \geq F_{(2)}(x^*_{(2)}) - \kappa ,$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq F_{(3)}(x^*_{(3)}) + \kappa,$$

$$\xi_1 \geq 1 , \quad \xi_2 \geq 1 , \quad \xi_1 + 3\xi_2 \leq 7,$$

или

$$\begin{aligned} &\kappa \geq 0, \\ &\xi_1 + \xi_2 \geq 5 - \kappa , \\ &2\xi_2 \geq 4 - \kappa , \\ &\xi_1 + 2\xi_2 \leq 3 + \kappa , \\ &\xi_1 \geq 1 , \quad \xi_2 \geq 1 , \quad \xi_1 + 3\xi_2 \leq 7, \end{aligned} \tag{3}$$

решение которой имеет вид $\left\| x^w \right\| = \left\| \begin{matrix} 2.2 \\ 1.2 \end{matrix} \right\|$ при $\kappa^w = 1.6$ с $F_{(1)}(x^w) = 3.4$, $F_{(2)}(x^w) = 2.4$, $F_{(3)}(x^w) = 4.6$.

Заметим, что решение задачи минимизации параметра рассогласования находится на множестве Парето для исходной многокритериальной модели, совпадающим в рассмотренном примере с допустимой областью.

В заключение отметим, что величина рассогласования в общем случае может зависеть от экзогенных параметров модели.

Проиллюстрируем этот факт следующим примером.

Пусть в E^2 заданы целевые функционалы

$$F_{(1)}(x) = 3\xi_1 \to \max, \quad F_{(2)}(x) = 2\xi_2 \to \max \quad \text{и} \quad F_{(3)}(x) = \xi_1 + 2\xi_2 \to \min,$$

которые требуется оптимизировать при условиях:

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0, \quad \xi_1 + \frac{a}{L-a}\xi_2 \leq a, \tag{.4}$$

где $0 < a < L$.

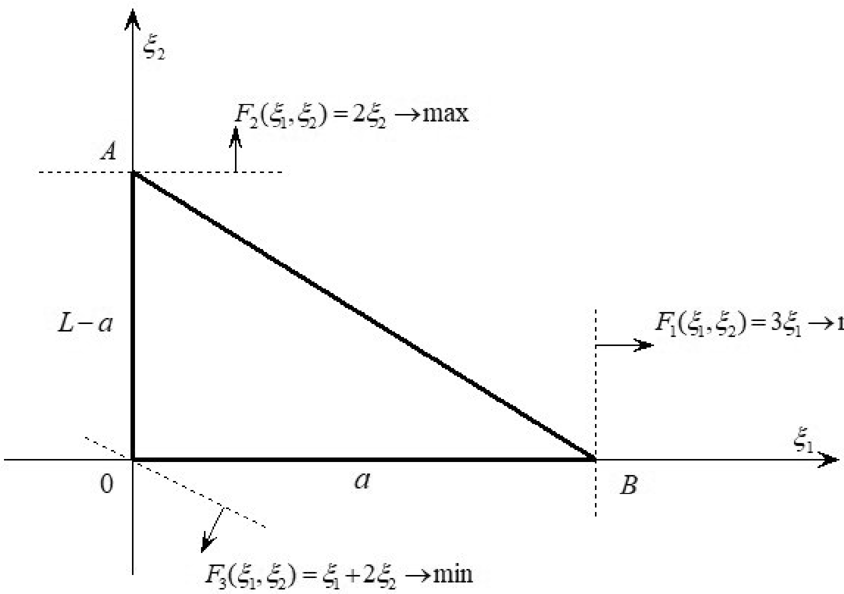

Рис. 3.

Геометрически множество допустимых состояний данной модели является прямоугольным треугольником с вершиной прямого угла в начале координат и катетами, лежащими на координатных осях (см. рис.3).

Сумма длин катетов постоянна и равна L, в то время, как длина катета, лежащего на оси $O\xi_1$, равна a.

Оценим зависимость значения параметра рассогласования κ от величины параметра a.

Решения однокритериальных задач будут для данной модели иметь вид:

для задачи $F_{(1)}(x) = 3\xi_1 \to \max$ при условиях (4):

$\left\| x^*_{(1)} \right\| = \left\| \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right\|$, с $F_{(1)}(x^*_{(1)}) = 3a$;

для задачи $F_{(2)}(x) = 2\xi_2 \to \max$ при условиях (4):

$\left\| x^*_{(2)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ L-a \end{matrix} \right\|$, с $F_{(2)}(x^*_{(2)}) = 2(L-a)$;

и для задачи $F_{(3)}(x) = \xi_1 + 2\xi_2 \to \min$ при условиях (4):

$\left\| x^*_{(3)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$, с $F_{(3)}(x^*_{(3)}) = 0$.

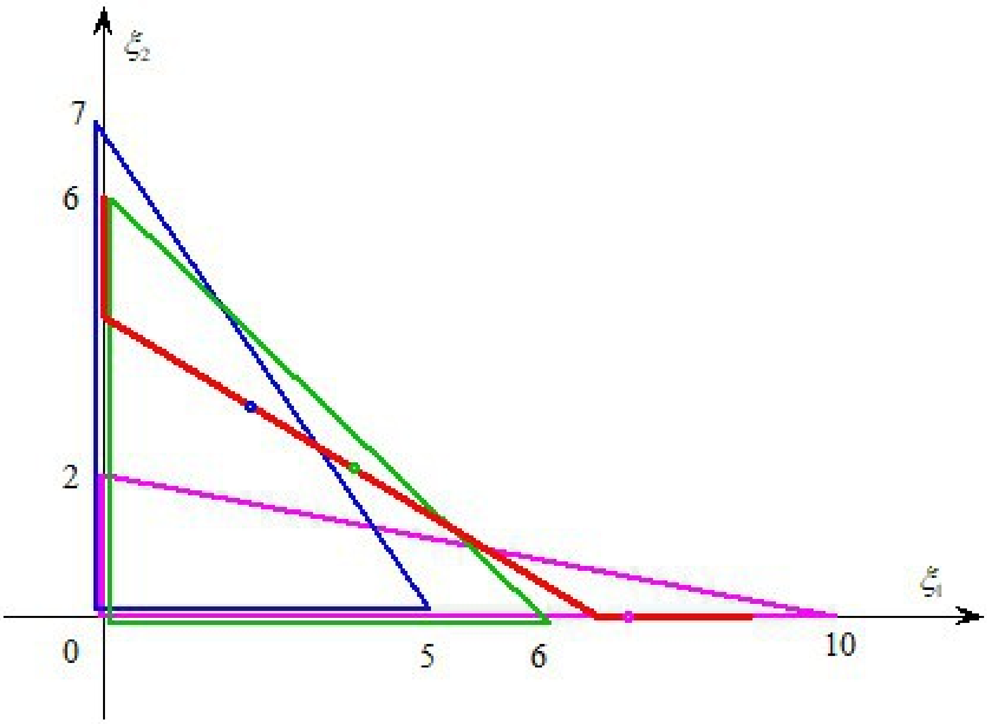

Рис. 4.

На рис. 4 показаны три варианта допустимой области модели и соответствующих точек с наименьшим рассогласованием для значений параметра:

синяя граница для $a = 5$,

зеленая граница для $a = 6$,

лиловая граница для $a = 10$.

Задача определения наименьшего значения параметра рассогласования по абсолютному изменению целевых функционалов в данном случае принимает вид:

найти минимум κ *по совокупности* $\{\kappa, \xi_1, \xi_2\}$
при условиях: $0 < a < L$

$$\kappa \ge 0,$$

$$3\xi_1 \ge 3a - \kappa\,,$$

$$2\xi_2 \ge 2(L-a) - \kappa\,,$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \le \kappa\,,$$

$$\xi_1 \ge 0\,,\quad \xi_2 \ge 0\,,\quad \xi_1 + \frac{a}{L-a}\xi_2 \le a,$$

для которой графики зависимостей $\xi_1(a), \xi_2(a), \kappa(a)$ с $L = 12$ приведены на рис. 5, На рис.5 также показан график $S(a) = \dfrac{\left| a - \xi_1(a) - \dfrac{a}{L-a}\xi_2(a) \right|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{L-a} \right)^2}}$ − зависимости от a величины расстояния от компромисной точки до границы $\xi_1 + \dfrac{a}{L-a}\xi_2 = a$.

Как можно видеть, существует оптимальное значение a, при котором значение параметра рассогласования оказывается минимальным.

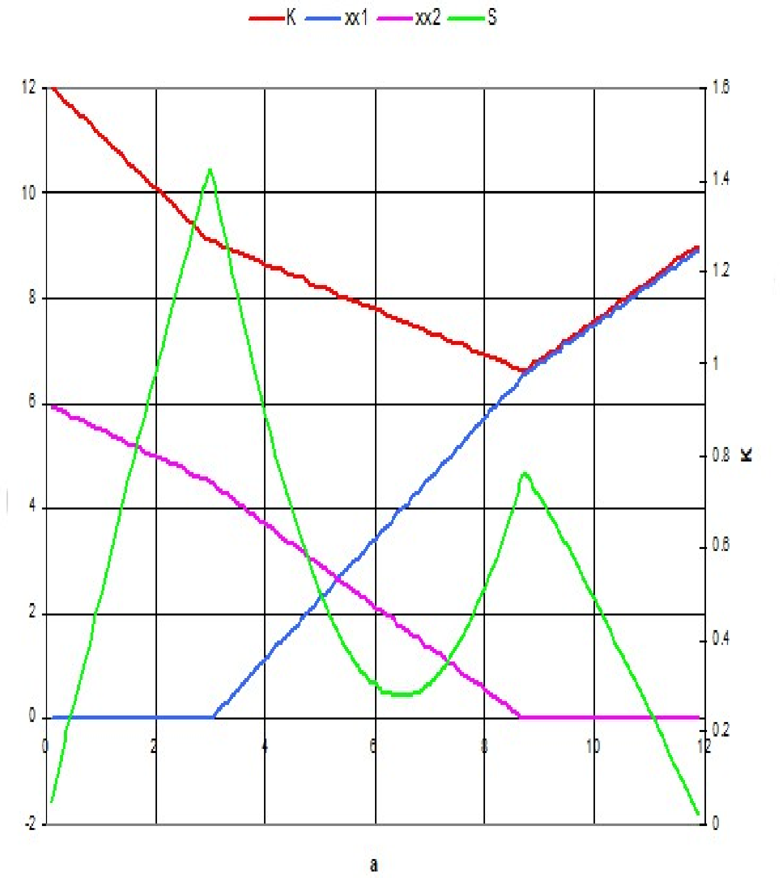

Рис. 5.