

# Функции обратных связей в задачах поиска минимакса и теории игр

А. Е. Умно́в<sup>1,\*</sup>, Е. А. Умно́в<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)  
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail:\* mail@umnov.ru

Получено 12+.03.2024, после доработки — xx.xx.xxxx.

Принята к публикации xx.xx.xxxx.

Рассматривается задача построения гладкой аппроксимации функции максимума. Предлагается метод использования этой аппроксимации для поиска значений кратного экстремума, минимакса или максимина. Основой метода является поиск стационарных точек модифицированной функции Лагранжа. Для модификации применяются функции, устанавливающие обратную связь между прямыми и двойственными переменными функции Лагранжа. Эта связь аналогична теореме Каруша Куна-Таккера, но не содержит в явном виде условий неотрицательности или дополняющей нежесткости. Приведены иллюстративные примеры.

**Ключевые слова.** Функция максимума, кратный экстремум, минимакс, метод функций обратных связей, модифицированная функция Лагранжа, задачи теории игр.

## 1. Введение

В данной статье рассматриваются задачи, связанные с поиском минимакса:

$$\begin{aligned} \text{найми} \quad & \min_{y \in \Upsilon} \max_{x \in \Theta_y} F(x, y) \\ \text{где} \quad & x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E^n; \quad \Theta_y : \{ x \mid f_i(x, y) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m} \} \\ \text{и} \quad & y = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T \in \Upsilon - \text{некоторому множеству в } E^K, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эта задача очевидно сводится к двухуровневой системе задач, на нижнем уровне которой решается задача параметрического программирования вида:

$$\begin{aligned} \text{максимизировать} \quad & F(x, y) \quad \text{по } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E^n \\ \text{для фиксированного вектора параметров} \quad & y = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T \in \Upsilon, \\ \text{при условиях:} \quad & x \in \Theta_y : \{ x \mid f_i(x, y) \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m} \}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а на верхнем уровне — задача

$$\text{минимизировать} \quad F(x_y^*, y) \quad \text{по } y = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T \in \Upsilon, \quad (1.3)$$

где  $x_y^* = \operatorname{argmax}_{x \in \Theta_y} F(x, y)$  — зависимость вектора  $\operatorname{argmax}_{x \in \Theta_y} F(x, y)$  от  $y$ .

Мы будем также предполагать, что функции  $F(x, y)$ ,  $f_i(x, y) \quad \forall i = \overline{1, m}$  имеют непрерывные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

Задачи вида (1.2) — (1.3), а также сводящиеся к ним, рассматривались в большом числе исследований, детальный обзор которых можно найти, например, в [Измаилов, 2006].

Основную проблему, могущую затруднить решение задач (1.3), создают следующие свойства зависимости  $x_y^*$ , обусловленных наличием неравенств в ограничениях задачи (1.2):

- область определения зависимости  $x_y^*$  может *быть уже* (по  $y$ ) области определения функций  $F(x, y)$ ,  $f_i(x, y)$ ;
- зависимость  $x_y^*$  может быть *неоднозначной*, т.е. *нефункциональной*;
- зависимость  $x_y^*$  может оказаться функцией, но *недифференцируемой*.

Известно значительное число алгоритмов решения задач типа (1.2) — (1.3) методами недифференцируемой оптимизации и теории чувствительности, например, [Danskin, 1967], [Rockafellar, 1970], [Демьянов, Васильев, 1972], [Нурминский, 1991], [Измаилов, 2006].

Хотя подобные алгоритмы позволяют преодолевать вычислительные затруднения, порождаемые особенностями зависимости  $x_y^*$ , практический интерес также представляют методы решения задач (1.2) — (1.3), основанные на классических тейлоровских разложениях. К настоящему времени варианты подобных алгоритмов были предложены, например, в [Fiacco, McCormic, 1968] [Гермейер, 1969], [Умнов, 2018].

В данной статье рассматривается подход, относящийся ко второму направлению. Предлагается метод построения гладкой функции  $\bar{x}(\tau, y)$ , аппроксимирующей зависимость  $x_y^*$ . То есть такой функции, для которой предельное равенство  $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau, y), y) = F(x_y^*, y)$  выполняется  $\forall y \in Y$ . В случае однозначности  $x_y^*$  последнее равенство заменяется на  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, y) = x_y^*$ . При этом, предлагаемая аппроксимация позволяет преодолевать также и другие, отмеченные выше, вычислительные затруднения, возникающие при решении задач вида (1.2) — (1.3).

Конкретно, в качестве  $\bar{x}(\tau, y)$  предлагается использовать седловую точку, модифицированной специальным образом, функции Лагранжа для задачи (1.2). Эта специфика такова, что гарантируется существование, функциональность и гладкость  $\bar{x}(\tau, y) \forall y \in Y$ .

В предлагаемом подходе функция  $\bar{x}(\tau, y)$  определяется в неявном виде. Однако использование классической теоремы *о системе неявных функций* позволяет преодолевать это затруднение и строить для  $\bar{x}(\tau, y)$  тейлоровские многочлены нужных порядков.

Метод функций обратных связей, то есть процедура модификации функции Лагранжа и поиска ее седловой точки, для линейной задачи (1.2) предложен и обоснован в [Умнов, 2019]. Нелинейный случай описан в [Умнов, 2022, 2023].

Предлагаемый в данной статье метод демонстрируется на примере:

- поиска глобального экстремума функций нескольких переменных,
- вычисления минимакса и/или максимина,
- решения некоторых типов задач теории игр.

## 2. Функции обратных связей: определение и свойства

Для большей наглядности вначале продемонстрируем использование метода функций обратных связей для линейного случая. Рассмотрим задачу

$$F(x) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j \rightarrow \max \quad \text{при условиях} \quad f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in E_+^n$  — неотрицательному ортанту евклидова пространства  $E^n$ .

Тогда двойственная к (2.1) задача имеет вид

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \lambda_i \rightarrow \min \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T \in E_+^m$$

$$\text{при условиях} \quad g_j(\lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

Метод функций обратных связей для решения задач (2.1) – (2.2) заключается в их замене системой уравнений

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & \forall i = \overline{1, m}, \\ \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i = Q(\tau, \bar{x}_j) & \forall j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.3)$$

где функция  $Q(\tau, s)$  обладает следующими свойствами.<sup>1</sup>

2–1°.  $Q(\tau, s)$  определена при  $\tau > 0$ , строго монотонно возрастает по  $s$  и при этом для любого фиксированного  $\tau$   $\lim_{s \rightarrow +0} Q(\tau, s) = -\infty$ ,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} Q(\tau, s) = +\infty$ .

2–2°.  $\forall s > 0 \lim_{\tau \rightarrow +0} Q(\tau, s) = 0$  причем этот предельный переход *равномерный* по  $s$  на  $[\varepsilon_0, +\infty)$   $\forall \varepsilon_0 > 0$ .

2–3°. В области определения функция  $Q(\tau, s)$  непрерывно дифференцируема по совокупности всех своих аргументов.

В [Умнов, 2019] показано, что при таких свойствах функции  $Q(\tau, s)$ , система (2.3) имеет единственное решение  $\{\bar{x}(\tau), \bar{\lambda}(\tau)\}$  при любом фиксированном положительном  $\tau$ .

Кроме того, если  $F^*$  есть *конечное* оптимальное значение целевой функции задачи (2.1), то для вектор-функций  $x(\tau)$  и  $\lambda(\tau)$  справедливы равенства  $\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau)) = F^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} G(\bar{\lambda}(\tau))$ , а в случае, когда оптимальные векторы  $x^*$  и  $\lambda^*$  задач (2.1) и (2.2) *единственны*, то  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^*$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}(\tau) = \lambda^*$ ,

Заметим также, что система уравнений (2.3) в силу условия 2–1° может также записана в виде

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_i = \text{inv}Q\left(\tau, -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_j\right) & \forall i = \overline{1, m}, \\ \bar{x}_j = \text{inv}Q\left(\tau, \sigma_j - \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i\right) & \forall j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где функция  $\text{inv}Q(\tau, s)$  – *обратная* к функции  $Q(\tau, s)$ , определена  $\forall \tau > 0$ , положительна и монотонно возрастает по  $s$  на всей вещественной оси. Это означает, что вектор-функции  $\bar{x}(\tau)$  и  $\bar{\lambda}(\tau)$  могут быть использованы как аппроксимации решений задач (2.1) и (2.2) при  $\tau \rightarrow +0$ .

Проиллюстрируем это утверждение следующим примером.

**Пример 2.1.** Для пары задач:

*прямая задача:* максимизировать в  $E^2$  функцию  $F(x) = 2\xi_1 + 3\xi_2$ ,

при условиях  $\xi_1 \geq 0$ ,  $\xi_2 \geq 0$  и  $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6$ ,  $2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$ ;

*двойственная задача:* минимизировать в  $E^2$  функцию  $G(\lambda) = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ ,

при условиях  $\lambda_1 \geq 0$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  и  $\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2$ ,  $2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$ .

решениями будут  $\xi_1^* = 2$ ,  $\xi_2^* = 2$ ,  $F^* = 10$  и  $\lambda_1^* = \frac{4}{3}$ ,  $\lambda_2^* = \frac{1}{3}$ ,  $G^* = 10$ .

Если использовать  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , то система (2.3) будет иметь вид

$$\begin{cases} -6 + \bar{\xi}_1 + 2\bar{\xi}_2 = \tau \ln \bar{\lambda}_1, \\ -6 + 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 = \tau \ln \bar{\lambda}_2, \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 = -\tau \ln \bar{\xi}_1, \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = -\tau \ln \bar{\xi}_2, \end{cases}$$

решения которой для различных значений параметра  $\tau$  приведены в табл. 2.1.

<sup>1</sup>Структура системы (2.3) оправдывает использование для  $Q(\tau, s)$  термина функция обратной связи.

Таблица 2.1. Решения примера 2.1

$\tau$	$\bar{\xi}_1(\tau)$	$\bar{\xi}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$G(\bar{\Lambda}(\tau))$
$10^{-1}$	1.91387303	2.05644660	9.99708585	1.30690566	0.31409072	9.72597830
$10^{-2}$	1.99167722	2.00559101	10.0001275	1.33099033	0.33105995	9.97230168
$10^{-3}$	1.99917130	2.00055811	10.0000169	1.33310196	0.33310265	9.99722768
$10^{-4}$	1.99991717	2.00005580	10.0000017	1.33331023	0.33331023	9.99972274
$10^{-5}$	1.99999172	2.00000558	10.0000002	1.33333102	0.33333102	9.99997227
$10^{-6}$	1.99999917	2.00000056	10.0000000	1.33333310	0.33333310	9.99999723

Перейдем теперь к нелинейному случаю. Нетрудно проверить, что система (2.3) это условия стационарности вспомогательной функции

$$U(\tau, x, \lambda) = \sum_{j=1}^n (\sigma_j x_j - R(\tau, x_j)) + \sum_{i=1}^m (\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_j \lambda_i, \quad (2.4)$$

где  $R(\tau, s) = \int_{\alpha(\tau)}^s Q(\tau, u) du$ , а значение  $\alpha(\tau)$  находится из уравнения  $Q(\tau, \alpha(\tau)) = 0$ . Такое уравнение  $\forall \tau > 0$  имеет (и притом единственное) решение, поскольку функция  $Q(\tau, s)$  строго монотонно возрастающая по  $s$  и не ограничена как снизу, так и сверху  $\forall s \in (0, +\infty)$ .

Функция (2.4) может интерпретироваться как некоторая *модификация функции Лагранжа*. Действительно,

$$U(\tau, x, \lambda) = L(x, \lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (2.5)$$

где  $L(x, \lambda)$  — регулярная функция Лагранжа задачи (2.1), имеющая вид

$$L(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) \quad \implies \quad L(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x).$$

Такая форма записи функции Лагранжа для задачи (2.1) не зависит от того, линейны функции  $F(x)$ ,  $f_i(x) \quad \forall i = \overline{1, m}$  или нет. Поэтому (2.5) можно использовать как *определение* вспомогательной функции  $U(\tau, x, \lambda)$  для нелинейной задачи

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать} && F(x) && \text{по } x \in E_+^n \\ & \text{при условиях} && f_i(x) \leq 0 && \forall i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что функции  $F(x)$  и  $f_i(x) \quad \forall i = \overline{1, m}$  имеют непрерывные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

Рассмотрим условия применимости функций обратных связей для поиска локального решения задачи (2.6) с конечным значением  $F^*$  и, быть может, с не единственной точкой  $x^*$  такой, что  $F^* = F(x^*)$ .

Предположим, что в рассматриваемой задаче функция Лагранжа регулярна, и также существуют компактные, с непустой внутренностью множества  $\Omega_x \subset E^n$  и  $\Omega_\lambda \subset E^m$ , для которых найдется хотя бы одна пара векторов  $x^* \in \Omega_x$  и  $\lambda^* \in \Omega_\lambda$ , такая, что  $L(x_v^*, \lambda_v^*, v) = F_v^*$ .

Пусть функция *обратных связей*  $Q(\tau, s)$  определена  $\forall \tau > 0$  и  $\forall s \in (0, +\infty)$  и обладает свойствами 2–1°, 2–2° и 2–3°. Из определения  $R(\tau, s)$  также следует, что  $\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s)$ .

В дальнейшем окажется удобнее использовать более общую постановку задачи (2.6). Мы будем предполагать, что условия  $x_j \geq 0$  имеются не для любых  $j = \overline{1, n}$ , а только для первых  $q \leq n$  или же отсутствуют вовсе. Кроме того, допустим, что постановке (2.6) имеется лишь  $p \leq m$  ограничений типа «неравенство» или таких ограничений нет, а остальные суть типа «равенство». То есть рассматривается задача нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать} && F(x) && \text{по } x \in E^n \\ & \text{при условиях} && x_j \geq 0 && \forall j = \overline{1, q}, \\ & && f_i(x) \leq 0 && \forall i = \overline{1, p}, \\ & && f_i(x) = 0 && \forall i = \overline{p+1, m}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $0 \leq q \leq n$  и  $0 \leq p \leq m$ .

Тогда, принимаемая по определению, вспомогательная функция будет иметь вид

$$U(\tau, x, \lambda) = L(x, \lambda) - \sum_{j=1}^q R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^p R(\tau, \lambda_i) \quad (2.8)$$

где  $L(x, \lambda) = F(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ .

В [Умнов, 2022] показано, что при сделанных выше предположениях справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.1.**  $\forall \tau > 0$  функция  $U(\tau, x, \lambda)$  имеет  $\{\bar{x}(\tau); \bar{\lambda}(\tau)\}$  — единственную седловую точку внутри  $\Omega_x \times \Omega_\lambda$ , где векторы  $\bar{x}(\tau)$  и  $\bar{\lambda}(\tau)$  — решения системы уравнений

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, \bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, \bar{x}, \bar{\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

В координатной форме система (2.9), обобщающая систему (2.3), имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = Q((\tau, \bar{x}_j(\tau))) & \forall j = \overline{1, q}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 & \forall j = \overline{q+1, n}, \\ f_i(\bar{x}(\tau)) = -Q((\tau, \bar{\lambda}_i(\tau))) & \forall i = \overline{1, p}, \\ f_i(\bar{x}(\tau)) = 0 & \forall i = \overline{p+1, m}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Структура системы (2.10) подобна условиям теоремы Каруша-Куна-Таккера, но не содержит явных условий неотрицательности множителей Лагранжа и условий дополняющей нежесткости.

Определяемые неявно системой (2.9), вектор-функции  $\bar{x}(\tau)$  и  $\bar{\lambda}(\tau)$  параметрически задают в  $\Omega_x \times \Omega_\lambda$  ( по  $\tau$  ) линию, которую будем называть *седловой траекторией задачи* (2.7).

**Теорема 2.2.** На седловой траектории задачи (2.7)

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\lambda}(\tau)\right) = F^*,$$

а в случае локальной единственности решения задачи (2.7) справедливы также равенства  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^*$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\lambda}(\tau) = \lambda^*$ .

**Теорема 2.3.** На седловой траектории вектор-функции  $\{\bar{x}(\tau); \bar{\lambda}(\tau)\}$  непрерывно дифференцируемы по своим аргументам  $\forall \tau > 0$ .

Утверждения данных теорем иллюстрирует

**Пример 2.2 :** максимизировать по  $x \in E^1$  функцию  $F(x) = (x - 2)^2$  при условиях  $x \geq 0$  и

$$f_1(x) = x \leq 4, \quad f_2(x) = -x \leq -1,$$

имеющая два локальных решения  $x^* = 1, F^* = 1$  и  $x^* = 4, F^* = 4$ .

Для решения этой задачи используем функцию обратных связей  $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right)$  с

$R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right)$ , Тогда  $U$ -функция (поскольку  $q = 1$ , а  $p = 2$ ) будет иметь вид

$$U(\tau, x, \lambda_1, \lambda_2) = (x - 2)^2 - \lambda_1(-4 + x) - \lambda_2(1 - x) - \\ - \frac{\tau}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\lambda_1^2}{2} - \ln \lambda_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\lambda_2^2}{2} - \ln \lambda_2 - \frac{1}{2} \right),$$

а условия ее стационарности соответственно

$$\begin{cases} 2(\bar{x} - 2) - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \frac{\tau}{2} \left( \bar{x} - \frac{1}{\bar{x}} \right), \\ 4 - \bar{x} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -1 + \bar{x} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right). \end{cases} \quad (2.11)$$

Свойства  $U$ -функции для примера 2.2 иллюстрируют рис. 2.1 – 2.4. На рис. 2.1 показана система изолиний функции  $U(\tau, x, \lambda_1, \lambda_2)$  при фиксированных  $\tau = 0.01$  и  $\lambda_1 = 0.001$ .

На рис. 2.2, 2.3 и 2.4 представлено (в трех различных вертикальных масштабах) графическое решение уравнения  $\bar{x} = \Phi(\tau, \bar{x})$ , получающегося при исключении неизвестных  $\bar{\lambda}_1$  и  $\bar{\lambda}_2$  из условий стационарности для  $\tau = 0.025, 0.1$  и  $0.250$ . На этих рисунках видно, что функция  $U(\tau, x, \lambda_1, \lambda_2)$  при малых положительных значениях  $\tau$  имеет три изолированные стационарные точки, принадлежащих соответственно окрестностям точек:

$$\left\{ x_{(1)}^* = 1, \lambda_{1(1)}^* = 0, \lambda_{2(1)}^* = 2 \right\}, \left\{ x_{(2)}^* = 2, \lambda_{1(2)}^* = 0, \lambda_{2(2)}^* = 0 \right\} \text{ и} \\ \left\{ x_{(3)}^* = 4, \lambda_{1(3)}^* = 4, \lambda_{2(3)}^* = 0 \right\}.$$

По данным, приведенным в табл. 2.2 (полученных одним и тем же алгоритмом), можно также заключить, что точка сходимости зависит как от начального приближения, так и от значения параметра  $\tau$ .

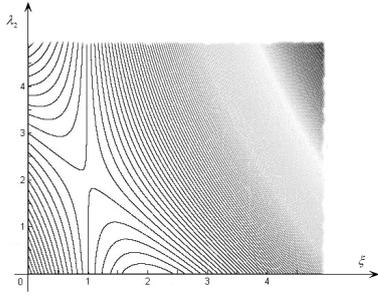


Рис. 2.1. Система изолиний для функции  $U(0.01, x, 0.001, \lambda_2)$ .

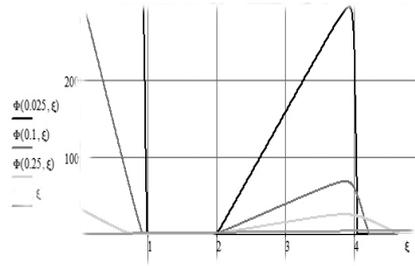


Рис. 2.2. Графическое решение уравнения  $\bar{x} = \Phi(\tau, \bar{x})$ .

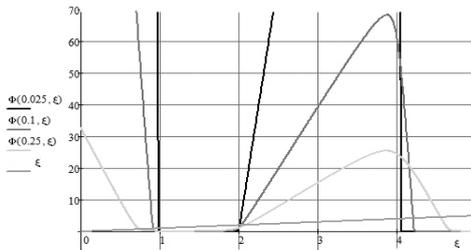


Рис. 2.3. Графическое решение уравнения  $\bar{x} = \Phi(\tau, \bar{x})$ .

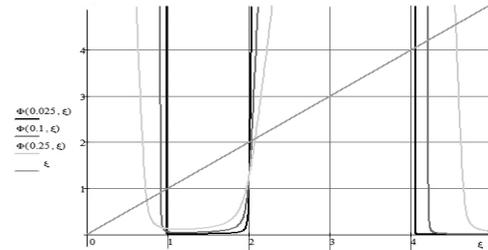


Рис. 2.4. Графическое решение уравнения  $\bar{x} = \Phi(\tau, \bar{x})$ .

Таблица 2.2

$\tau$	Начальная точка								
	3.0000	0.0001	1.0000	3.0000	2.0000	1.0000	3.0000	0.0001	0.0001
	Решения системы (2.11)								
	$\bar{x}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{x}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{x}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$
0.1	0.91398262	0.01619786	2.17922612	4.19890911	4.21540712	0.01562651	2.02670086	0.02532203	0.04858472
0.03	0.97654558	$4.96 \cdot 10^{-3}$	2.05115786	4.05724084	4.06222643	$4.91 \cdot 10^{-3}$	2.00764433	$7.53 \cdot 10^{-3}$	0.01488291
0.01	0.99239520	$1.66 \cdot 10^{-3}$	2.01679571	4.01885900	4.02052410	$1.66 \cdot 10^{-3}$	2.00251576	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$4.99 \cdot 10^{-3}$
0.003	0.99774061	$5.00 \cdot 10^{-4}$	2.00501162	4.00563478	4.00613464	$4.99 \cdot 10^{-4}$	2.00075141	$7.50 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-3}$
0.001	0.99924896	$1.67 \cdot 10^{-4}$	2.00166796	4.00187609	4.002042746	$1.67 \cdot 10^{-4}$	2.00025016	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$5.00 \cdot 10^{-4}$
0.0003	0.99977491	$5.00 \cdot 10^{-5}$	2.00050012	4.00056260	4.00061260	$5.00 \cdot 10^{-5}$	2.00007501	$7.50 \cdot 10^{-5}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$
0.0001	2.00002500	$2.50 \cdot 10^{-5}$	2.00501162	4.00018751	4.00020418	$1.67 \cdot 10^{-5}$	2.00002500	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$5.00 \cdot 10^{-5}$
0.00007	2.00001750	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$3.50 \cdot 10^{-5}$	4.00013126	4.00014292	$1.17 \cdot 10^{-5}$	2.00001750	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$3.50 \cdot 10^{-5}$
0.00003	4.00005625	4.00006125	$5.00 \cdot 10^{-6}$	4.00005625	4.00006125	$5.00 \cdot 10^{-6}$	2.00000750	$7.50 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$
0.00001	4.00001875	4.00002042	$1.67 \cdot 10^{-6}$	4.00001875	4.00002042	$1.67 \cdot 10^{-6}$	4.00001875	4.00002042	$1.67 \cdot 10^{-6}$

### 3. Использование функций обратных связей в задачах поиска глобального экстремума

Опишем теперь применение метода функций обратных связей в задачах, которые сводятся к задачам математического программирования. Рассмотрим вначале использование этого метода для поиска экстремума в конечном наборе чисел.

Значение максимального из чисел в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$  есть решение следующей задачи линейного программирования:

$$\text{минимизировать } f \quad \text{при условиях: } f \geq v_i \quad \forall i = \overline{1, K}. \quad (3.1)$$

Приняв во внимание, что  $f$  не ограничена по знаку, построим для этой задачи вспомогательную функцию (2.8) вида:

$$U(\tau, f, \lambda, v) = -f - \sum_{i=1}^K \lambda_i (v_i - f) + \sum_{i=1}^K R(\tau, \lambda_i), \quad (3.2)$$

Если в качестве функции обратной связи выбрать  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , то система уравнений (2.9) будет

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ v_i - \bar{f} = \tau \ln \bar{\lambda}_i \quad \forall i = \overline{1, K} \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\lambda}_i = e^{\frac{v_i - \bar{f}}{\tau}} \quad \forall i = \overline{1, K}, \\ \bar{f} = \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Откуда значение максимального и минимального из чисел в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$  будут соответственно равны

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) \quad \text{и} \quad f_{\min}^* = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{-\frac{v_i}{\tau}} \right). \quad (3.4)$$

Оценим погрешность оценки значения  $f_{\max}^*$ , получаемую по формуле  $\bar{f}(\tau) = \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right)$ .

Будем считать, что числа в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$  упорядочены в порядке убывания и первые  $M < K$  из них равны  $f^*$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{f}(\tau) - f^* &= \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) - \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} = \tau \ln \left( \sum_{i=M+1}^K e^{\frac{v_i - f^*}{\tau}} \right) = \tau \ln \left( M + \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i - f^*}{\tau}} \right) \leq \\ &\leq \tau \ln \left( M + (K - M) e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) = \tau \ln M + \tau \ln \left( 1 + \frac{K - M}{M} e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) \leq \tau \ln M + \tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}, \end{aligned}$$

где  $A = v_{M+1}$ .

Полученное неравенство означает, что порядок малости погрешности равен  $\tau \ln M$  в случае, когда  $M > 1$  (то есть, в исследуемом наборе максимальное число не единственное). Если  $M = 1$ , то при  $\tau \rightarrow +0$  порядок погрешности заметно меньше, поскольку он определяется слагаемым  $\tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}$ . Заметим, что полученная оценка погрешности обусловлена специальным видом функции обратных связей.

Например, если использовать функцию обратной связи  $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right)$ , то система уравнений (2.9) будет иметь вид

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ v_i - \bar{f} = \frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda}_i - \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) \quad \forall i = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (3.5)$$

для которого возможно лишь численное решение.

Для иллюстрации в табл. 3.1 приведены результаты решения системы (3.3) для набора чисел  $\{ 5, -2, 4, 7, 0 \}$  при различных значениях параметра  $\tau$ .

Таблица 3.1.

$\tau$	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_3(\tau)$	$\bar{\lambda}_4(\tau)$	$\bar{\lambda}_5(\tau)$
$10^{-0.00}$	7.170719212	0.114095529	$1.0404 * 10^{-4}$	0.041973399	0.843058261	$7.6877 * 10^{-4}$
$10^{-0.25}$	7.018454440	0.027615558	$1.0841 * 10^{-7}$	$4.6651 * 10^{-3}$	0.967715479	$3.7990 * 10^{-6}$
$10^{-0.50}$	7.000590038	$1.7884 * 10^{-3}$	$4.355 * 10^{-13}$	$7.5703 * 10^{-5}$	0.998135874	$2.430 * 10^{-10}$
$10^{-0.75}$	7.000002329	$1.3048 * 10^{-5}$	$4.355 * 10^{-13}$	$4.7135 * 10^{-8}$	0.999986904	0.000000000
$10^{-1.00}$	7.000000000	$2.0612 * 10^{-9}$	0.000000000	$9.358 * 10^{-14}$	0.999999998	0.000000000
$10^{-1.25}$	7.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	1.000000000	0.000000000

В табл. 3.2 для сравнения приведены численные решения системы (3.5) для набора чисел  $\{ 5, 5, 4, 5, 0 \}$  также при различных значениях параметра  $\tau$ .

Таблица 3.2.

$\tau$	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_3(\tau)$	$\bar{\lambda}_4(\tau)$	$\bar{\lambda}_5(\tau)$
$10^{-1.00}$	5.109862742	0.333328289	0.333328289	$1.5133 * 10^{-5}$	0.333328289	0.000000000
$10^{-1.20}$	5.069317752	0.333333319	0.333333319	$4.3629 * 10^{-8}$	0.333333319	0.000000000
$10^{-1.50}$	5.034741173	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-2.00}$	5.010986124	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-4.00}$	5.000109861	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-7.00}$	5.000000110	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000

Из теоремы 3.2 следует, что погрешность метода функций обратных связей уменьшается при  $\tau \rightarrow +0$ . Однако, если для конкретного значения  $\tau$  она неприемлемо велика, то в силу теоремы 3.3 для уменьшения погрешности аппроксимации можно применить теорему о неявных функциях.

Действительно, если рассмотреть систему (2.9) как неявное определение вектор-функций  $\{ \bar{x}(\tau), \bar{\lambda}(\tau) \}$ , то их уточненные значения могут быть получены, например, по формулам

$$\hat{x}_j = \bar{x}_j(\tau) - \tau \frac{d\bar{x}_j}{d\tau} \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \hat{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(\tau) - \tau \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} \quad \forall i = \overline{1, m}. \quad (3.6)$$

Детальное рассмотрение этой процедуры выходит за рамки данной статьи. Отметим только, что в [Умнов, 2022] показано, что, точка  $\{ \hat{x}, \hat{\lambda} \}$ , в общем случае уже не принадлежит седловой траектории. Однако, уточнение по формулам (3.6) может выполняться итеративно в несколько шагов.

Для этого достаточно заменить скалярный параметр  $\tau$  на векторный, превратив седловую траекторию в пучок таких траекторий.

Рассмотрим теперь задачу отыскания экстремальных значений для числовых множеств мощности континуум.

Пусть дана непрерывная на компакте с не пустой внутренностью  $\Omega \subset E^n$  функция  $f(x)$ . Заменяя в формулах (3.4) операцию суммирования интегрированием, получим оценку значения глобального максимума функции многих переменных,

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx. \quad (3.7)$$

Справедливость (3.7) следует из условия  $f(x) \leq f^*$  и оценок:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx = f^* + \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx. \\ 0 &\leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx \leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \text{mes } \Omega = 0. \end{aligned}$$

Связь операций интегрирования и поиска экстремума ранее использовалась для решения задач разных классов: в методе перевала, описанном, например, в [Федорюк, 1977] или при поиске максимина в игровых задачах [Федоров, 1979].

Следующий пример иллюстрирует применение формулы (3.7).

**Пример 3.1.** Найти глобальные экстремумы по  $x \in \Omega \subseteq E^2$  функции  $f(x) = |x_1| + |x_2 - 1|$ , где  $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{array} \right\}$ .

**Решение.** Для глобального максимума имеем:

$$\begin{aligned} f_{\max}^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{\frac{|x_1|+|x_2-1|}{\tau}} dx_1 dx_2 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \frac{\tau^2}{3} e^{\frac{2}{\tau}} \left( 5 - 10e^{-\frac{1}{\tau}} + e^{\frac{2}{\tau}} - 8e^{-\frac{3}{2\tau}} + 12e^{-\frac{2}{\tau}} \right) = 4. \end{aligned}$$

Он достигается на границе области  $\Omega$  при  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 4$  (см. рис. 3.1).

Глобальный минимум внутренний, негладкий, в точке  $x_1 = 0, x_2 = 1$

$$\begin{aligned} f_{\min}^* &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{-\frac{|x_1|+|x_2-1|}{\tau}} dx_1 dx_2 = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \frac{\tau^2}{3} \left( 5e^{-\frac{2}{\tau}} - 10e^{-\frac{1}{\tau}} + e^{-\frac{4}{\tau}} - 8e^{-\frac{1}{2\tau}} + 12 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что оптимальное значение целевой функции в задаче математического программирования

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & F(x) \quad x \in E^n \\ \text{при условии} & x \in \Omega \subseteq E^n \end{array}$$

может быть представлено (при соответствующих предположениях о свойствах  $F(x)$  и  $\Omega$ ) как

$$F^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{F(x)}{\tau}} dx.$$

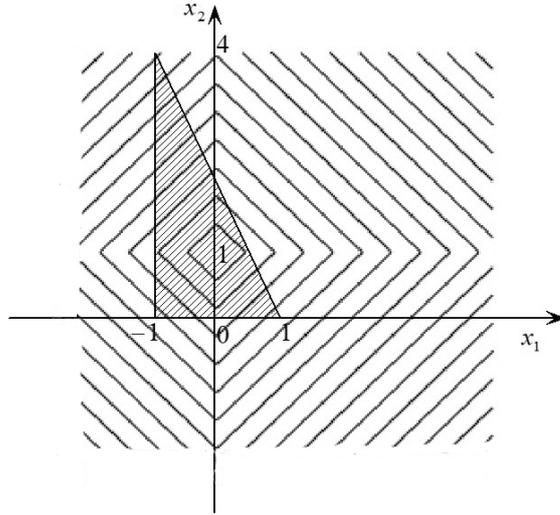


Рис. 3.1. Система изолиний для функции  $f(x) = |x_1| + |x_2 - 1|$

#### 4. Использование функций обратных связей в задачах поиска кратного экстремума и минимакса

Метод функций обратных связей может быть применен для решения оптимизационных задач, целевые функции которых являются суперпозициями операторов поиска экстремума.

Для примера рассмотрим дискретную задачу поиска минимакса и максимина для матрицы

$$\|A_{ij}\| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 12 & 3 & 11 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 10 \end{vmatrix},$$

в которой надо найти  $A_{\max\min} = \max_{j=1,n} \left( \min_{i=1,m} A_{ij} \right)$  и  $A_{\min\max} = \min_{i=1,m} \left( \max_{j=1,n} A_{ij} \right)$ , где  $n = 4$  и  $m = 3$ .

Воспользуемся равенствами (3.4), из которых следует, что

$$A_{\max\min} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{i=1}^m e^{\frac{A_{i,\min}}{\tau}} \right), \quad \text{где} \quad A_{i,\min} = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{j=1}^n e^{-\frac{A_{ij}}{\tau}} \right)$$

или, после упрощений,

$$A_{\max\min} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n e^{-\frac{A_{ij}}{\tau}} \right)^{-1} = 7. \quad (4.1)$$

Аналогично находим

$$A_{\min\max} = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m e^{\frac{A_{ij}}{\tau}} \right)^{-1} = 8. \quad (4.2)$$

В табл. 4.1 приведены значения функций, стоящих под знаком предела в (4.1) и (4.2), для различных значений параметра  $\tau$ .

Таблица 4.1.

$\tau$	0.300	0.250	0.200	0.150	0.125	0.100	0.075	0.050
minmax( $\tau$ )	7.999631605	7.999917657	7.999990981	7.99999757	7.99999986	8	8	8
maxmin( $\tau$ )	6.989497444	6.995464027	6.998656991	6.999809227	6.999958074	6.99999546	6.99999879	7

Теперь рассмотрим дискретно-непрерывную минимаксную задачу:

$$\text{найти минимум по } x \quad F(x) = \max_{k \in [1, K]} \{f_k(x)\}$$

$$\text{при условии } x \in \Omega, \text{ где } \Omega \subseteq E^n - \text{компакт}, \quad (4.3)$$

предполагая, что функции  $f_k(x) \forall k \in [1, K]$ , непрерывно дифференцируемые на  $\Omega$ .

В случае, когда множество  $\Omega$  задается системой неравенств вида  $y_i(x) \leq 0 \quad i = [1, m]$ , задача (4.3) равносильна задаче математического программирования:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать по } \{x, w\} \quad -w \\ &\text{при условиях } f_k(x) - w \leq 0 \quad \forall k = [1, K], \\ & \quad y_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь мы также предполагаем, что функции  $y_i(x) \forall i \in [1, m]$ , непрерывно дифференцируемые на множестве  $\Omega$ .

Зависимость  $w_x^*$  в сделанных предположениях является непрерывной, но недифференцируемой функцией. Поэтому для решения задачи (4.4) применим метод функций обратных связей с вспомогательной функцией

$$U(\tau, x, \Lambda, w) = -w - \sum_{k=1}^K \mu_k (f_k(x) - w) - \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i(x) + \sum_{k=1}^K R(\tau, \mu_k) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (4.5)$$

где  $\Lambda = \{\mu_1, \dots, \mu_K, \lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ .

Условия стационарности для функции (4.5) можно записать в виде системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k \cdot \text{grad}_x f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \cdot \text{grad}_x y_i(\bar{x}) &= 0, \\ -f_k(\bar{x}) + \bar{w} + Q(\tau, \bar{\mu}_k) &= 0 \quad \forall k = \overline{1, K}, \\ -y_i(\bar{x}) + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) &= 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

Если задача поиска минимакса ограничений не имеет, а функция обратных связей определена как  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , то условия стационарности вспомогательной функции упрощаются

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k \cdot \text{grad}_x f_k(\bar{x}) &= 0, \\ \bar{\mu}_k &= e^{\frac{f_k(\bar{x}) - \bar{w}}{\tau}} \quad \forall k = \overline{1, K}, \\ -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

В системе (4.7) из двух последних равенств получается сглаженная аппроксимация функции максимума  $\bar{w}(x) = \tau \ln \sum_{k=1}^K e^{\frac{f_k(x)}{\tau}}$ , в то время как, первые два равенства в (4.7) являются необходимыми условиями стационарности для  $\bar{w}(x)$  по  $x$ .

Достаточно высокая степень гладкости аппроксимации позволяет использовать стандартный классический набор инструментов поиска и анализа стационарных точек функции (4.5). В качестве примера рассмотрим задачу.

**Задача 4.1** Найти минимальное значение функции максимума

$$f(x_1, x_2) = \max_{\{x_1; x_2\}} \{ x_1^2 + x_2^2; 25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2 \}.$$

**Решение.** Постановка задачи (4.4) в данном случае имеет вид.

*максимизировать по  $\{x_1, x_2, w\}$  функцию  $-w$ ,  
при условиях*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - w &\leq 0, \\ 25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2 - w &\leq 0. \end{aligned}$$

Вспомогательная функция (4.5) в этой задаче будет

$$\begin{aligned} U(\tau, x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, w) = -w - \mu_1 (x_1^2 + x_2^2 - w) - \mu_2 (25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2 - w) + \\ + R(\tau, \mu_1) + R(\tau, \mu_2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Условия стационарности для функции (4.8) по переменным  $x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, w$  таковы

$$\left\{ \begin{aligned} -2\bar{\mu}_1 \bar{x}_1 + 2\bar{\mu}_2 (\bar{x}_1 + 1) &= 0, \\ -2\bar{\mu}_1 \bar{x}_2 + 2\bar{\mu}_2 (\bar{x}_2 - 2) &= 0, \\ -(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{w}) + Q(\tau, \bar{\mu}_1) &= 0, \\ -(25 - (\bar{x}_1 + 1)^2 - (\bar{x}_2 - 2)^2 - \bar{w}) + Q(\tau, \bar{\mu}_2) &= 0, \\ -1 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 &= 0, \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

где  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ .

Кратко поясним схему решения системы (4.9). Из первых двух уравнений имеем  $\bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$ . Из трех последних — следует, что в качестве сглаженной аппроксимации функции максимума  $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  можно взять

$$\bar{w}(\tau, x_1, x_2) = \tau \ln \left( \exp \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau} \right) + \exp \left( \frac{25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2}{\tau} \right) \right), \quad (4.10)$$

система изолиний которой для  $\tau = 0.1$  показана на рис. 4.1.

Исходя из вида изолинии функции (4.10), можно заключить, что эта функция имеет стационарные точки  $\{\bar{x}_{1(A)}; \bar{x}_{2(A)}\}$ ,  $\{\bar{x}_{1(B)}; \bar{x}_{2(B)}\}$  и  $\{\bar{x}_{1(C)}; \bar{x}_{2(C)}\}$ , принадлежащие соответственно окрестностям точек  $A, B$  и  $C$ , отмеченных на рис. 4.1.

Координаты точек  $A, B$  и  $C$  можно найти рассмотрев функцию максимума  $f(x_1, x_2)$ . Точка  $B$  — локальный максимум функции  $f(x_1, x_2)$  — имеет координаты  $\{-1; 2\}$ , а точки  $A$  и  $C$  суть решения задачи на условный экстремум вида:

$$\begin{aligned} \text{максимизировать по } \{x_1, x_2\} \quad & x_1^2 + x_2^2, \\ \text{при условии} \quad & 25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2; \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что  $A \{-2; 4\}$  и  $C \{1; -2\}$ .

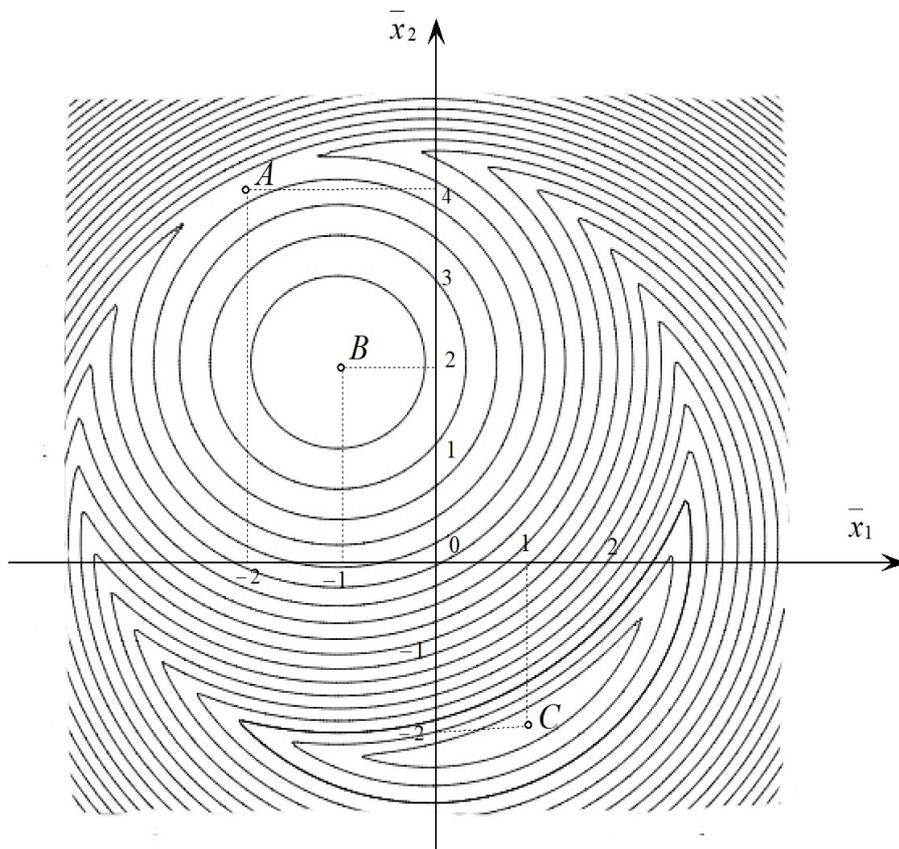


Рис. 4.1. Система изолиний функции (4.10).

В табл. 4.2 приведены численные оценки координат стационарных точек для сглаживающей функции  $\bar{w}(\tau, x_1, x_2)$  при различных значениях параметра  $\tau$ :  $\{\bar{x}_{1(A)}; \bar{x}_{2(A)}\}$ ,  $\{\bar{x}_{1(B)}; \bar{x}_{2(B)}\}$  и  $\{\bar{x}_{1(C)}; \bar{x}_{2(C)}\}$ .

Таблица 4.2

Начальная точка процедуры поиска решения									
	-1.5	3.5	22.5	-0.6	2.3	24.8	3.0	1.0	10.0
Решения системы (4.9) в окрестности точки:									
	А			В			С		
$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{w}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{w}$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{w}$
1.00	1.976305906	3.952611813	20.63559463	-1.000000002	2.000000004	25	1.022565341	-2.045130681	5.63737652
0.95	-1.977519843	3.955039686	20.60385998	-1.000000001	2.000000001	25	1.021461696	-2.042923391	5.605467921
0.90	-1.978730572	3.957461144	20.57212044	-1	2	25	1.020355555	-2.040711109	5.573563393
0.85	-1.979938116	3.959876232	20.54037603	-1	2	25	1.019246903	-2.038493805	5.541662957
0.80	-1.981142498	3.962284995	20.50862678	-1	2	25	1.018135724	-2.036271447	5.50976663
Реш.	-2	4	20	-1	2	25	1	-2	5

Для иллюстрации сглаживающего свойства функций обратных связей используем, следующее из системы (4.9), равенство  $\bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$ . В этом случае зависимость  $\bar{w}$  от  $\tau$  и  $\bar{x}_1$  может быть представлена функцией

$$\Phi(\tau, \bar{x}_1) = \tau \ln \left( \exp \frac{5\bar{x}_1^2}{\tau} + \exp \left( \frac{25 - 5(\bar{x}_1 + 1)^2}{\tau} \right) \right). \quad (4.11)$$

График этой функции, а также его фрагменты в окрестностях стационарных точек для различных значений параметра  $\tau$ , показаны на рис. 4.2, 4.3, 4.4 и 4.5.

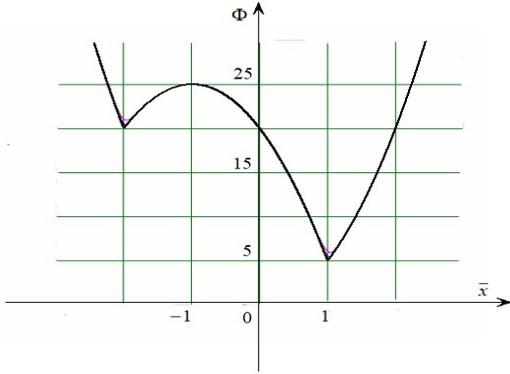


Рис. 4.2. Графики функции  $\Phi(\tau, \bar{x})$ .

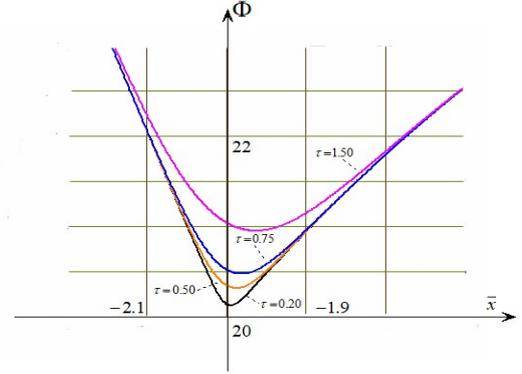


Рис. 4.3. Графики функции  $\Phi(\tau, \bar{x})$  в окрестности точки А

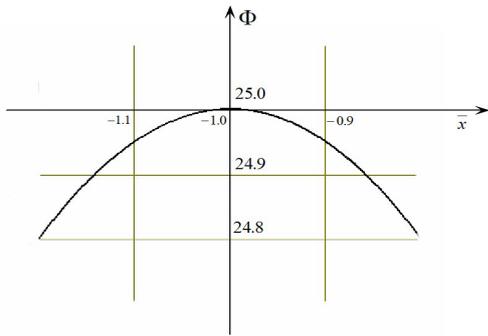


Рис. 4.4. Графики функции  $\Phi(\tau, \bar{x})$  в окрестности точки В

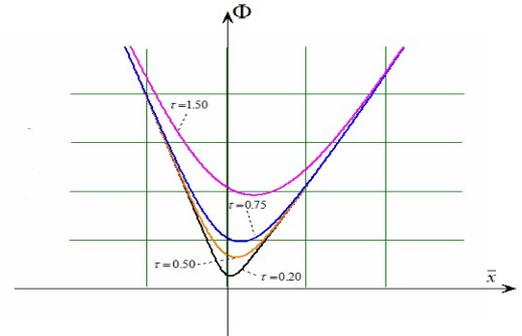


Рис. 4.5. Графики функции  $\Phi(\tau, \bar{x})$  в окрестности точки С

Заметим, что в окрестности точки В (см. рис. 4–3 ) отличия значений сглаживающей функции для различных  $\tau$  невелики и на графике практически не заметны. Этот эффект объясняется специфическими свойствами функции обратной связи  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , использованной в формулировке системы (4.9).

Для исследования поведения функции  $\bar{w}(\tau, x_1, x_2)$  используем стандартные достаточные условия классификации стационарных точек, основанные на критерии Сильвестра. С этой целью приведем предварительно формулы для частных производных этой функции до второго порядка включительно.

Пусть

$$\Delta = \exp \frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau} + \exp \frac{25 - (x_1 + 1)^2 - (x_2 - 2)^2}{\tau}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} = -\frac{2}{\Delta} \left( (1+x_1) \exp \frac{25 - (x_1+1)^2 - (x_2-2)^2}{\tau} - x_1 \exp \frac{x_1^2 + x_2^2}{\tau} \right)$$

и

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} = 2x_2 + \frac{4(1-x_2)}{\Delta} \exp \frac{25 - (x_1+1)^2 - (x_2-2)^2}{\tau}.$$

Аналогично, для вторых производных имеем

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1^2} = \frac{2}{\Delta^2} \left( \frac{2(1+2x_1)^2}{\tau} \exp \frac{-2x_1+4x_2+20}{\tau} - \exp \frac{2}{\tau} \left( 25 - (x_1+1)^2 - (x_2-2)^2 \right) + \exp \frac{2}{\tau} (x_1^2 + x_2^2) \right),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{8(2x_1+1)(x_2-1)}{\tau \Delta^2} \exp \frac{-2x_1+4x_2+20}{\tau},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_2^2} = \frac{2}{\Delta^2} \left( \frac{8(1-x_2)^2}{\tau} \exp \frac{-2x_1+4x_2+20}{\tau} - \exp \frac{2}{\tau} \left( 25 - (x_1+1)^2 - (x_2-2)^2 \right) + \exp \frac{2}{\tau} (x_1^2 + x_2^2) \right).$$

В точках  $\{\bar{x}_{1(A)}; \bar{x}_{2(A)}\}$ ,  $\{\bar{x}_{1(B)}; \bar{x}_{2(B)}\}$  и  $\{\bar{x}_{1(C)}; \bar{x}_{2(C)}\}$  матрицы Гессе функции  $\bar{w}(\tau, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$  при  $\tau = 0.85$  будут

$$\begin{aligned} \|\text{Hess}(A)\| &= \left\| \begin{array}{cc} 8.454728203 & -18.260864263 \\ -18.260864263 & 35.846024597 \end{array} \right\|, & \|\text{Hess}(B)\| &= \left\| \begin{array}{cc} -1.999999999 & -5.688 \cdot 10^{-10} \\ -5.688 \cdot 10^{-10} & -1.999999999 \end{array} \right\|, \\ \|\text{Hess}(C)\| &= \left\| \begin{array}{cc} 10.343449802 & -19.370457876 \\ -19.370457876 & 39.399136601 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Из курса математического анализа известно, что для использования критерия Сильвестра, как достаточного условия наличия или отсутствия экстремума, необходимы следующие величины:

$$\text{норма градиента } Ngr = \sqrt{\left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} \right)^2}, \text{ а также главные миноры матрицы Гессе}$$

$$M_{(1)} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1^2} \quad \text{и} \quad M_{(2)} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2.$$

Значения этих числовых характеристик для точек  $\{\bar{x}_{1(A)}; \bar{x}_{2(A)}\}$ ,  $\{\bar{x}_{1(B)}; \bar{x}_{2(B)}\}$  и  $\{\bar{x}_{1(C)}; \bar{x}_{2(C)}\}$ , подсчитанных для  $\tau = 0.85$ , а также классификация данных точек по критерию Сильвестра приведены в табл. 4.3.

Отметим, что сравнительно большая величина относительной погрешности полученных решений обусловлена свойствами функции обратной связи  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ . Она была использована, поскольку позволяет найти решения в виде формул.

Если же ограничиться численным поиском стационарных точек, то применение функции обратной связи  $Q(\tau, s) = \tau \left( s - \frac{1}{s} \right)$  в системе (4.9) позволяет получать решения с существенно меньшей погрешностью лишь за счет уменьшения значения параметра  $\tau$ .

Таблица 4.3

Решения системы (4.9) в окрестности точки:			
	А	В	С
$\bar{x}_1$	-1.979938116	-1.000000000	1.019246903
$\bar{x}_2$	3.959876232	2.000000000	-2.038493805
$\bar{w}$	20.540376029	25.000000000	5.541662957
$Ngr$	$3.2095 \cdot 10^{-9}$	$0.2418 \cdot 10^{-9}$	$9.4269 \cdot 10^{-9}$
$M_{(1)}$	8.454728203	-1.999999999	10.343449802
$M_{(2)}$	-30.390768491	3.999999996	32.308353346
<i>Тип точки:</i>	Нет экстремума (седло)	Локальный максимум	Локальный минимум

Результаты решения этой системы в точках  $\{\bar{x}_{1(A)}; \bar{x}_{2(A)}\}$ ,  $\{\bar{x}_{1(B)}; \bar{x}_{2(B)}\}$  и  $\{\bar{x}_{1(C)}; \bar{x}_{2(C)}\}$  для этого случая приведены в табл. 4.4(A), 4.4(B) и 4.4(C).

Таблица 4.4(A)

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{w}$
1.00	-1.934001409	3.868002818	0.325662654	0.674337346	21.44680679
$10^{-1}$	-1.993845902	3.987691805	0.332646728	0.667353272	20.14446196
$10^{-2}$	-1.999388464	3.998776928	0.333265357	0.666734643	20.01444462
$10^{-3}$	-1.999938885	3.999877769	0.333326542	0.666673458	20.00144445
$10^{-4}$	-1.999993889	3.999987778	0.333332654	0.666667346	20.00014444
$10^{-5}$	-1.999999389	3.999998778	0.333333265	0.666666735	20.00001444
$10^{-6}$	-1.999999939	3.999999878	0.333333327	0.666666673	20.00000144
$10^{-7}$	-1.999999994	3.999999988	0.333333333	0.666666667	20.00000014
$10^{-8}$	-1.999999999	3.999999999	0.333333333	0.666666667	20.00000001
$10^{-9}$	-2	4	0.333333333	0.666666667	20
$10^{-10}$	-2	4	0.333333333	0.666666667	20
<i>Точн. реш.</i>	-2	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20

Если же подобрать функцию обратной связи, обеспечивающую приемлемую погрешность при заданном  $\tau$ , не удастся, то можно применить процедуру итеративного уточнения решения по формулам аналогичным (3.6):

$$\bar{x}_{j(T+1)} = \bar{x}_{j(T)} - \tau \frac{d\bar{x}_{j(T)}}{d\tau} \quad \forall j = 1, 2 \quad \forall T = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

где  $T$  — номер итерации.

Поскольку  $\tau$  теперь фиксировано, то для уточняющего вектора можно ввести обозначение  $\delta\bar{x} = \tau \frac{d\bar{x}}{d\tau}$ .

Т а б л и ц а 4.4(B)

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{w}$
1.00	-1.056966891	2.113933783	0.051140285	0.948859715	25.08881072
$10^{-1}$	-1.005063133	2.010126265	$5.0124 \cdot 10^{-3}$	0.994987624	25.00087682
$10^{-2}$	-1.000500626	2.001001251	$5.0012 \cdot 10^{-4}$	0.999499875	25.00000875
$10^{-3}$	-1.000050006	2.000100013	$5.0001 \cdot 10^{-5}$	0.999949999	25.00000009
$10^{-4}$	-1.000005000	2.000010000	$5.0000 \cdot 10^{-6}$	0.999995000	25
$10^{-5}$	-1.000000500	2.000001000	$5.0000 \cdot 10^{-7}$	0.999999500	25
$10^{-6}$	-1.000000050	2.000000100	$5.0000 \cdot 10^{-8}$	0.999999950	25
$10^{-7}$	-1.000000005	2.000000010	$5.0000 \cdot 10^{-9}$	0.999999995	25
$10^{-8}$	-1.000000001	2.000000001	$5.0000 \cdot 10^{-10}$	0.999999999	25
$10^{-9}$	-1	2	$5.0000 \cdot 10^{-11}$	1	25
$10^{-10}$	-1	2	$5.0000 \cdot 10^{-12}$	1	25
<i>Точн. реш.</i>	-1	2	0	1	25

Т а б л и ц а 4.4(C)

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{w}$
1.00	1.057334324	-2.114668648	0.660530720	0.339469280	6.443182771
$10^{-1}$	1.006069204	-2.012138408	0.665995028	0.334004972	5.144427985
$10^{-2}$	1.000610687	-2.001221375	0.666598840	0.333401160	5.014444275
$10^{-3}$	1.000061107	-2.000122214	0.666659877	0.333340123	5.001444443
$10^{-4}$	1.000006111	-2.000012222	0.666665988	0.333334012	5.000144444
$10^{-5}$	1.000000611	-2.000001222	0.666666599	0.333333401	5.000014444
$10^{-6}$	1.000000061	-2.000000122	0.666666660	0.333333340	5.000001444
$10^{-7}$	1.000000006	-2.000000012	0.666666666	0.333333334	5.000000144
$10^{-8}$	1.000000001	-2.000000001	0.666666667	0.333333333	5.000000014
$10^{-9}$	1	-2	0.666666667	0.333333333	5.000000001
$10^{-10}$	1	-2	0.666666667	0.333333333	5
<i>Точн. реш.</i>	1	-2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	5

Тогда, согласно теореме о неявных функциях, компоненты этого вектора удовлетворяют системе линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1^2} \delta \bar{x}_1(T) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial x_2} \delta \bar{x}_2(T) = -\tau \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial x_2} \delta \bar{x}_1(T) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_2^2} \delta \bar{x}_2(T) = -\tau \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_2 \partial \tau}, \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_1 \partial \tau} = -\frac{4}{\tau^2 \Delta^2} (1 + 2x_1) (x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 10) \exp \frac{-2x_1 + 4x_2 + 20}{\tau},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_2 \partial \tau} = -\frac{8}{\tau^2 \Delta^2} (x_2 - 1) (x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 10) \exp \frac{-2x_1 + 4x_2 + 20}{\tau}.$$

Исходя из предположения о непрерывности вторых производных функции  $\bar{w}(\tau, x_1 < x_2)$  по всем своим аргументам в некотором компакте, содержащем точку  $C$ , можно предполагать, что процесс (4.12) будет сходиться к точке  $C$  для достаточно малого положительного  $\tau$  в силу принципа сжимающих преобразований.

Результаты соответствующих вычислений для решаемой задачи приведены в табл. 4.5, в которой использованы обозначения:  $\bar{F} = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2$  и  $\bar{G} = 25 - (\bar{x}_1 - 1)^2 - (\bar{x}_2 + 2)^2$ .

Т а б л и ц а 4.5

$T$	$\bar{x}_1(T)$	$\bar{x}_2(T)$	$\delta \bar{x}_1(T)$	$\delta \bar{x}_2(T)$	$\bar{x}_1(T+1)$	$\bar{x}_2(T+1)$	$\bar{F}(T+1)$	$\bar{G}(T+1)$
0	1.019246903	-2.038493805	-0.018868520	0.037737040	1.000378383	-2.000756765	5.003784542	4.992431632
1	1.000378383	-2.000756765	$-3.7824 \cdot 10^{-4}$	$7.5648 \cdot 10^{-4}$	1.000000143	-2.000000286	5.000001431	4.999997138
2	1.000000143	-2.000000286	$-1.4321 \cdot 10^{-7}$	$2.8612 \cdot 10^{-7}$	1	-2	5	5
3	1	-2	...	...	...	...	...	...
$\infty$	1	-2	0	0	1	-2	5	5

## 5. Функции обратных связей в задачах теории игр

Одним из направлений математического моделирования, в котором используется оператор минимакса (или максимина) является теория игр.

Поскольку метод функций обратных связей есть инструмент поиска значений минимакса, то основные особенности его применения можно рассмотреть для случая стандартной игровой задачи. Однако условие задачи усложним так, чтобы продемонстрировать возможности метода обратных связей в полной мере.

В этой задаче требуется найти оптимальные стратегии противоборствующих игроков при известной платежной матрице с нулевой суммой. Рассмотрим следующий вариант ее постановки.

Пусть у двух игроков: первого  $A$  и второго  $B$ , имеются наборы стратегий с номерами  $j = \overline{1, n}$  и  $i = \overline{1, m}$  соответственно. Элементами платежной матрицы являются числа  $a_{ij}$ , равными значениям выигрыша игрока  $A$  и проигрышу  $B$  при выборе первым игроком стратегии с номером  $j$ , а вторым — с номером  $i$ . Будем также считать, что элементы платежной матрицы суть достаточно гладкие функции от вектора параметров  $p = (p_1, p_2, \dots, p_K)^T$ , принадлежащего некоторой области  $\Upsilon \subseteq E^K$ .

Обозначим *смешанную стратегию* игрока  $A$  как  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , где  $x_j$  — вероятность выбора первым игроком стратегии с номером  $j$ . Ее оптимальное значение есть решение

задачи линейного параметрического программирования:

$$\begin{aligned}
& \text{максимизировать по } \{x, v\} \text{ функцию } v \\
& \text{при условиях } x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\
& \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p) x_j \geq v \quad \forall i = \overline{1, m}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Как было отмечено во введении, решением задачи (5.1) является зависимость  $\{x_p^*, v_p^*\}$ , которая может не быть определенной во всем  $E^n$ , не являться функцией от  $p$ , а в случае функциональности не иметь производных по компонентам  $p$ .

Во введенных обозначениях величина  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p) x_j$  есть математическое ожидание выигрыша игрока  $A$ . Из теории игр также известно, что оптимальная смешанная стратегия игрока  $B$ :  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$ , является решением задачи, двойственной к задаче (5.1):

$$\begin{aligned}
& \text{минимизировать по } \{\lambda, \mu\} \text{ функцию } \mu \\
& \text{при условиях } \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \\
& \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(p) \lambda_i \leq \mu \quad \forall j = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

В задаче (5.2) величина  $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i$  есть математическое ожидание проигрыша игрока  $B$ . Решение задачи (5.2) будем обозначать  $\{\lambda_p^*, \mu_p^*\}$ .

Пусть компоненты вектора  $p$  и параметр  $\tau > 0$  фиксированы. Тогда использование метода функций обратных связей для решения пары задач (5.1) — (5.2) сводится к поиску стационарных точек вспомогательной функции

$$U(\tau, x, \lambda, v, \mu, p) = v - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( v - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p) x_j \right) - \mu \left( -1 + \sum_{j=1}^n x_j \right) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \tag{5.3}$$

Эти условия стационарности определяются системой уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(p) \bar{\lambda}_i - \bar{\mu} - Q(\tau, \bar{x}_j) = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \\ 1 - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i = 0, \quad 1 - \sum_{j=1}^n \bar{x}_j = 0, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(p) \bar{x}_j - \bar{v} + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

В [Умнов, 2019] показано, что  $\forall p \in E^K$  система (5.4) однозначно разрешима. При этом для ее решений  $\bar{v}(\tau, p)$  и  $\bar{\mu}(\tau, p)$  справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{v}(\tau, p) = v_p^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\mu}(\tau, p) = \mu_p^*.$$

Теорема 2.3 останется справедливой, если в ее формулировке  $\tau$  заменить любой компонентой вектора  $p$ . Тогда функции  $\bar{v}(\tau, p)$  и  $\bar{\mu}(\tau, p)$  можно использовать как гладкие аппроксимации зависимостей  $v_p^*$  и  $\mu_p^*$ .

Пусть вторые частные производные у всех функций  $\alpha_{ij}(p)$  непрерывны. В этом случае для решения задач, в постановку которых входят зависимости  $v_p^*$  и  $\mu_p^*$ , можно использовать тейлоровские аппроксимации функций  $\bar{v}(\tau, p)$  и  $\bar{\mu}(\tau, p)$  до второго порядка включительно.

Наконец, как показано в [Умнов, 2023], совместное использование правила дифференцирования сложной функции и теоремы о неявных функциях для условий (5.4), позволяет в качестве аппроксимации градиента функции  $\bar{v}(\tau, p)$  принять вектор-функцию с компонентами

$$\bar{U}'_{pt}(\tau, p) = \frac{\partial U}{\partial p_t}(\tau, \bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{v}, \bar{\mu}, p) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_j \bar{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_{ij}(p)}{\partial p_t} \quad \forall t = \overline{1, K}. \quad (5.5)$$

Для примера, применим метод функций обратных связей для исследования решений игровой задачи с платежной матрицей, зависящей от двух скалярных параметров  $p$  и  $q$ .

$$\|D_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 25 - p - q & 3 & 4 \\ 5 & p & 7 & 8 \\ 9 & q & 11 & 12 \end{array} \right\|. \quad (5.6)$$

Для этой матрицы величины  $D_{\min\max} = \min_{i=1,3} \left( \max_{j=1,4} D_{ij}(p, q) \right)$  и  $D_{\max\min} = \max_{j=1,4} \left( \min_{i=1,3} D_{ij}(p, q) \right)$  являются непрерывными, кусочно-линейными функциями от  $p$  и  $q$ . Пусть значения их аргументов суть  $p \in [0, 15]$  и  $q \in [0, 15]$ .

Для исследования свойств этих функций воспользуемся их гладкими аппроксимациями, которые получаются методом функций обратных связей из формул (4.1) и (4.2), и имеют вид:

$$\bar{D}_{\min\max}(\tau, p, q) = -\tau \ln \sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 e^{\frac{D_{ij}(p,q)}{\tau}} \right)^{-1} \quad \bar{D}_{\max\min}(\tau, p, q) = \tau \ln \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^4 e^{-\frac{D_{ij}(p,q)}{\tau}} \right)^{-1}. \quad (5.7)$$

Системы изолиний для функций  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, p, q)$  и  $\bar{D}_{\max\min}(\tau, p, q)$  при значении  $\tau = 0.05$  приведены на рис. 5.1 и 5.2 соответственно. На этих рисунках также показаны их значения в характерных точках.

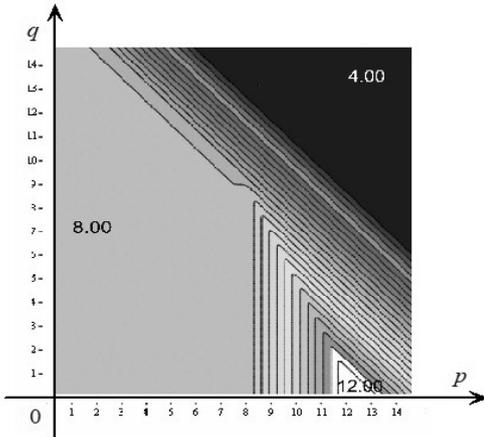


Рис. 5.1. Система изолиний для функции  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, p, q)$

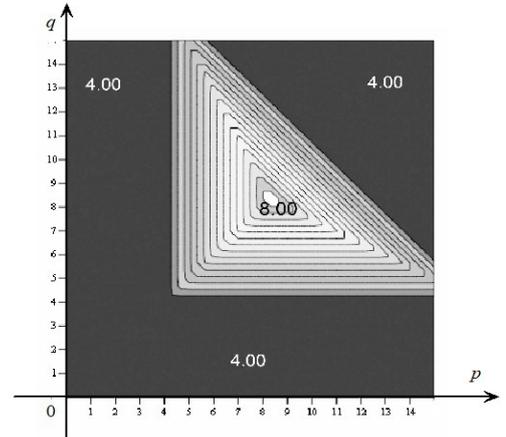


Рис. 5.2. Система изолиний для функции  $\bar{D}_{\max\min}(\tau, p, q)$

Известно, что решение пары задач (5.1) — (5.2) в смешанных стратегиях существует для любой платежной матрицы. Однако особый интерес представляют решения в *чистых стратегиях*. То есть решения, в которых все компоненты как вектора  $x$ , так и вектора  $\lambda$ , равны нулю, кроме одного, равного единице.

Условием существования такого решения является наличие у платежной матрицы *седлового элемента*, то есть элемента  $\alpha_{ij}$ , для которого  $\alpha_{ij} = A_{\min\max} = A_{\max\min}$ . Выполнение этого условия очевидно зависит от значений параметров  $p$  и  $q$ . На рис. 5.3 показана система изолиний для функции  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, p, q) - \bar{D}_{\max\min}(\tau, p, q)$  для значения  $\tau = 0.05$ . Здесь черным цветом отмечены точки, в которых матрица (5.6) имеет седловые элементы.

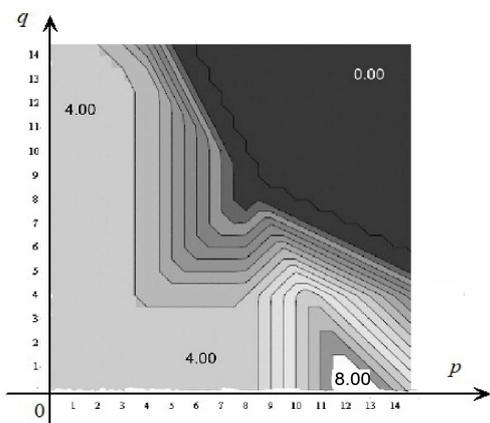


Рис. 5.3. Система изолиний для функции  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, p, q) - \bar{D}_{\max\min}(\tau, p, q)$

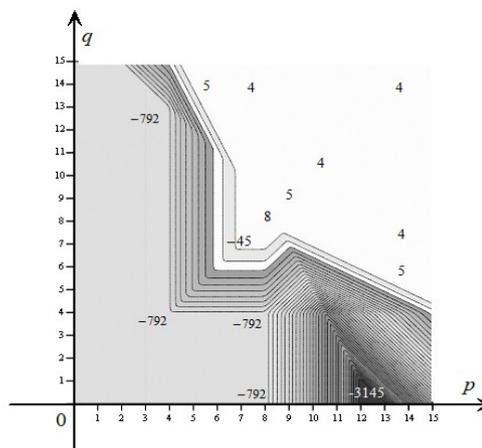


Рис. 5.4. Система изолиний для функции  $\Phi(\Theta, p, q)$  в масштабе 1.00

Для получения сглаженных аппроксимаций зависимостей  $D_{\min\max}$  и  $D_{\max\min}$  от  $\tau$ ,  $p$  и  $q$  можно использовать также решения системы (5.4) и формулы (5.5), или аналогичные им, но более высокого порядка. В качестве иллюстрации в табл. 5.1a и 5.1b приведены значения аргументов стационарных точек вспомогательной функции (5.3) для  $p = 10$  и  $q = 9$  при различных  $\tau$ .

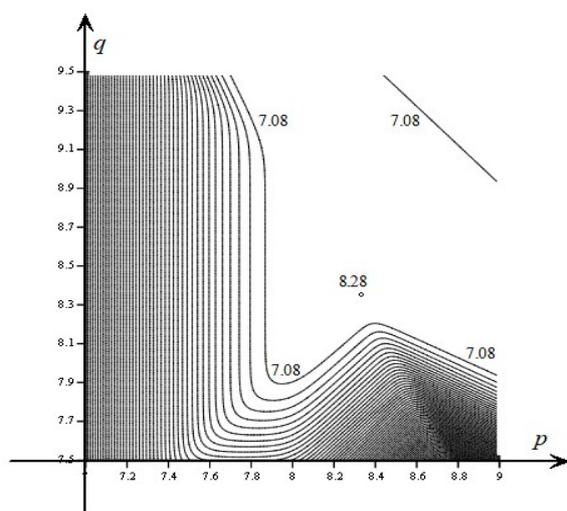
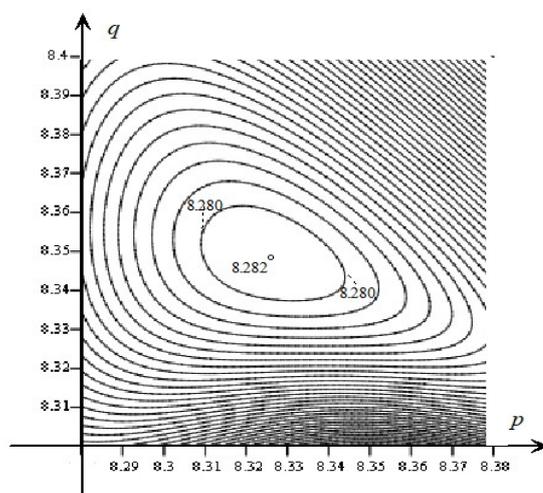
Отметим также, что в рассматриваемом примере производные (5.5) находятся по формулам

$$\bar{U}'_p = -\bar{x}_2\bar{\lambda}_1 + \bar{x}_2\bar{\lambda}_2 \quad \text{и} \quad \bar{U}'_q = -\bar{x}_2\bar{\lambda}_1 + \bar{x}_2\bar{\lambda}_3.$$

Т а б л и ц а 5.1a

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{v}$
$10^{-1}$	0.010143028	0.946888255	0.017065774	0.025902943	5.843463575
$10^{-2}$	$1.0016 \cdot 10^{-3}$	0.994816832	$1.6712 \cdot 10^{-3}$	$2.5103 \cdot 10^{-3}$	5.984928431
$10^{-3}$	$1.0002 \cdot 10^{-4}$	0.999483166	$1.6671 \cdot 10^{-4}$	$2.5010 \cdot 10^{-4}$	5.998499278
$10^{-4}$	$1.0000 \cdot 10^{-5}$	0.999948332	$1.6667 \cdot 10^{-5}$	$2.5001 \cdot 10^{-5}$	5.999849993
$10^{-5}$	$1.0000 \cdot 10^{-6}$	0.999994833	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	$2.5000 \cdot 10^{-6}$	5.999985000
$10^{-6}$	$1.0000 \cdot 10^{-7}$	0.999999483	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	$2.5000 \cdot 10^{-7}$	5.999998500
$10^{-7}$	$1.0000 \cdot 10^{-8}$	0.999999948	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	$2.5000 \cdot 10^{-8}$	5.999999850
$10^{-8}$	$1.0000 \cdot 10^{-9}$	0.999999995	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	$2.5000 \cdot 10^{-9}$	5.999999985
<i>Точн. реш.</i>	0	1	0	0	6

$\tau$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\mu}$	$\bar{U}'_p$	$\bar{U}'_q$
$10^{-1}$	0.972216214	0.012489251	0.015294535	6.101300739	-0.908754189	-0.908754189
$10^{-2}$	0.997097639	$1.2500 \cdot 10^{-3}$	$1.6524 \cdot 10^{-3}$	6.010009038	-0.990686004	-0.990285707
$10^{-3}$	0.999708477	$1.2500 \cdot 10^{-4}$	$1.6652 \cdot 10^{-4}$	6.001000087	-0.999066859	-0.999025357
$10^{-4}$	0.999970835	$1.2500 \cdot 10^{-5}$	$1.6665 \cdot 10^{-5}$	6.000100001	-0.999906669	-0.999902504
$10^{-5}$	0.999997083	$1.2500 \cdot 10^{-6}$	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	6.000010000	-0.999990667	-0.999990250
$10^{-6}$	0.999999708	$1.2500 \cdot 10^{-7}$	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	6.000001000	-0.999999067	-0.999999025
$10^{-7}$	0.999999971	$1.2500 \cdot 10^{-8}$	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	6.000000100	-0.999999907	-0.999999903
$10^{-8}$	0.999999997	$1.2500 \cdot 10^{-9}$	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	6.000000010	-0.999999991	-0.999999990
Точн. реш.	1	0	0	6	-1	-1

Рис. 5.5. Система изолиний для функции  $\Phi(\Theta, p, q)$  в масштабе 0.1Рис. 5.6. Система изолиний для функции  $\Phi(\Theta, p, q)$  в масштабе 0.01

Значения параметров, для которых существуют седловые элементы, неединственны. Это позволяет расширять спектр постановок задач для игровых математических моделей. Например можно рассмотреть следующую задачу.

**Пример 5.1.** Для игры с платежной матрицей (5.6) найти значения параметров  $p$  и  $q$ , при которых величина  $D_{\min\max}$  имеет максимум на множестве чистых стратегий.

**Решение.** 1°. Поскольку существование решения в чистых стратегиях требует существования седловой точки у платежной матрицы, формулировка данной задачи может иметь вид:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{p, q\} \text{ значение } D_{\min\max} \\ & \text{при условиях } 0 \leq p \leq 15, \quad 0 \leq q \leq 15, \\ & D_{\min\max} - D_{\max\min} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

2°. Теперь воспользуемся методом *штрафных функций* [Фиакко, МакКормик, 1968], чтобы приближенно оценить искомые значения  $p$  и  $q$ . Применение этого метода в рассматриваемом примере может быть сведено к безусловной максимизации вспомогательной функции вида:

$$\Phi(\Theta, p, q) = \bar{D}_{\min\max}(p, q) - \frac{1}{2\Theta} \left( \bar{D}_{\min\max}(p, q) - \bar{D}_{\max\min}(p, q) \right)^2, \quad (5.9)$$

при малом положительном значении  $\Theta$ .

Функция  $\Phi(\Theta, p, q)$  является сглаженной аппроксимацией целевой функции задачи (5.8). Эффект сглаживания иллюстрируют рис. 5.4 – 5.6, на которых в разном масштабе показаны изолинии для функции (5.9) и приведены ее значения в некоторых точках. Здесь было использовано значение  $\Theta = 0.01$ .

Максимум функции  $\Phi(\Theta, p, q)$  при  $\Theta = 0.01$  достигается в точке, для которой  $\bar{p} = 8.325815949$ ,  $\bar{q} = 8.348452929$  и  $\Phi(\Theta, \bar{p}, \bar{q}) = 8.28158929$ . Норма градиента функции  $\Phi(\Theta, p, q)$  в этой точке равен  $1.4541 \cdot 10^{-6}$ .

Т а б л и ц а 5.2а

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{v}$
$10^{-1}$	$9.1459 \cdot 10^{-3}$	0.956169686	0.014420881	0.020263533	8.058310734
$10^{-2}$	$9.1515 \cdot 10^{-4}$	0.995611686	$1.4436 \cdot 10^{-3}$	$2.0296 \cdot 10^{-3}$	8.305809423
$10^{-3}$	$9.1516 \cdot 10^{-5}$	0.999561163	0.000144361	$2.0296 \cdot 10^{-4}$	8.330580921
$10^{-4}$	$9.1516 \cdot 10^{-6}$	0.999956116	$1.4436 \cdot 10^{-5}$	$2.0296 \cdot 10^{-5}$	8.333058092
$10^{-5}$	$9.2730 \cdot 10^{-7}$	0.999995508	$1.4740 \cdot 10^{-6}$	$2.0903 \cdot 10^{-6}$	8.333306242
$10^{-6}$	$1.3369 \cdot 10^{-7}$	0.999998903	$2.8735 \cdot 10^{-7}$	$6.7565 \cdot 10^{-7}$	8.333330906
$10^{-7}$	$1.5512 \cdot 10^{-8}$	0.999999720	$4.0876 \cdot 10^{-8}$	$2.2400 \cdot 10^{-7}$	8.333333009
<i>Точн. реш.</i>	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 5.2б

$\tau$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\mu}$	$\bar{U}'_p$	$\bar{U}'_q$
$10^{-1}$	0.657125682	0.217912820	0.124961498	8.337816823	-0.419962024	-0.508839261
$10^{-2}$	0.657393186	0.217761533	0.124845281	8.333377313	-0.437702412	-0.530210918
$10^{-3}$	0.657395820	0.217760043	0.124844137	8.333333772	-0.439442849	-0.532317980
$10^{-4}$	0.657395847	0.217760028	0.124844125	8.333333338	-0.439616526	-0.532528351
$10^{-5}$	0.640002794	0.234666153	0.125331054	8.333333333	-0.405334820	-0.514669428
$10^{-6}$	0.410689714	0.280293397	0.309016889	8.333333334	-0.130396173	-0.101672713
$10^{-7}$	0.257461958	0.457547439	0.284990604	8.333333333	0.200085425	0.027528638
<i>Точн. реш.</i>	***	***	***	$\frac{25}{3}$	***	***

3°. Для получения точного решения в рассматриваемом примере удобнее использовать метод линейной экстраполяции. Поскольку этот метод реализуется по формулам аналогичным рассмотренным ранее (4.12), то здесь ограничимся приведением лишь окончательной оценки, дающей  $p^* = 8.333333333$  и  $q^* = 8.333333333$ . В табл. 5.2a и 5.2b показано решение системы (5.4) для этих значений  $p$  и  $q$  при различных значениях параметра  $\tau$ .

Заметим, что при оптимальных значениях параметров седловыми элементами матрицы (5.6) являются элементы  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  и  $D_{32}$ . Точные решения задач (5.1) — (5.2) определены однозначно лишь для переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, v$  и  $\mu$ .

Данное решение не является решением в чистых стратегиях для задачи (5.2). Дело в том, что решение задачи (5.1) при оптимальных значениях  $p^*$  и  $q^*$ , *переопределено*. Число активных ограничений в оптимальной точке задачи (5.1) больше числа ее переменных.

Решение в этом случае задачи (5.2) не единственно. Оптимальными значениями переменных служит любой набор неотрицательных чисел  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$  таких, что  $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = 1$ . Среди них есть три в чистых стратегиях. Одно такое решение с  $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0$  показано в табл. 5.3a и 5.3b. Его можно получить, например добавив в систему (5.4) неравенство  $\lambda_2 \geq 1$ . Оно имеет то же значение целевой функции, что и решение в табл. 5.2a и 5.2b. Другие решения в чистых стратегиях с  $\lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 0$  и  $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 1$  находятся аналогично.

Т а б л и ц а 5.3a

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{v}$
$10^{-15}$	0	1	0	$1.4500 \cdot 10^{-15}$	8.333333314
<i>Точн. реш.</i>	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 5.3b

$\tau$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\mu}$	$\bar{U}'_p$	$\bar{U}'_q$
$10^{-15}$	$1.6928 \cdot 10^{-8}$	0.999999979	$1.7177 \cdot 10^{-8}$	8.333333445	0.999999962	$2.4870 \cdot 10^{-10}$
<i>Точн. реш.</i>	***	***	***	$\frac{25}{3}$	***	***

## Заключение

В данной статье рассматривается метод поиска кратного экстремума, а также минимакса (максимина).

Предлагаемый метод заключается в построении гладкой аппроксимации зависимости от параметров седловых точек модифицированной функции Лагранжа. Для модификации используются функции, задающие обратные связи между прямыми и двойственными переменными в условиях оптимальности.

Эти условия оптимальности структурно аналогичны условиям оптимальности Каруша-Куна-Таккера. Однако они не содержат ограничений неотрицательности для переменных и условий дополняющей нежесткости.

Приводятся описания свойств функций обратных связей, обеспечивающих требуемую гладкость аппроксимации. Предлагаемый подход иллюстрируется решениями разных типов экстремальных, минимаксных задач, а также задач теории игр.

Возможным направлением развития предлагаемого подхода представляется — повышение эффективности его практического использования. По мнению авторов, такая оценка есть предмет специального исследования. Однако, некоторые соображения можно сформулировать уже здесь.

Например, можно снизить зависимость вычислительного процесса от начальных приближений. Для этого достаточно заменить неотрицательные переменные в условиях стационарности их абсолютными величинами. То есть решать не систему (2.9), а

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, |\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \dots, |\bar{x}_p|, \bar{x}_{p+1}, \dots, \bar{x}_n, |\bar{\lambda}_1|, |\bar{\lambda}_2|, \dots, |\bar{\lambda}_q|, \bar{\lambda}_{q+1}, \dots, \bar{\lambda}_m, v) = o, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, |\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \dots, |\bar{x}_p|, \bar{x}_{p+1}, \dots, \bar{x}_n, |\bar{\lambda}_1|, |\bar{\lambda}_2|, \dots, |\bar{\lambda}_q|, \bar{\lambda}_{q+1}, \dots, \bar{\lambda}_m, v) = o. \end{cases} \quad (6.1)$$

При этом процесс решения (6.1) может завершиться в любом ортанте  $E^n \otimes E^m$ , но решение системы (2.9) очевидно получится из решения (6.1) заменой найденных значений компонент  $\bar{x}$  и  $\bar{\lambda}$  их абсолютными величинами. Отметим, что практически все приведенные в данной статье задачи были решены с использованием (6.1).

Интерес, по мнению авторов, представляет также исследование сходимости процедуры решения системы (2.9) в случае, когда одна из задач в двойственной паре плохо обусловлена, а вторая переопределена. Такая ситуация, например, возникает в случае пары задач (5.1) — (5.2).

## Литература

- Гермейер Ю.Б. Приближенное сведение с помощью штрафных функций задачи определения максимина к задаче определения максимума. // ЖВМ-МФ. 1969. Т. 9, № 3. С. 730-731.
- Germeyyer YU.B. Priblizhennoye svedeniye s pomoshch'yu shtrafnyykh funktsiy zadachi opredeleniya maksimina k zadache opredeleniya maksimuma. // ZHVM-MF. 1969. T. 9, № 3. S. 730-731.
- Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. // М. Наука. 1981, 384 С.
- Dem'yanov V.F., Vasil'yev L.V. Nedifferentsiruyemaya optimizatsiya. // M. Nauka. 1981, 384 S.
- Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. // М., Наука, 1972. — С. 368.
- Dem'yanov V.F., Malozetov V.N. Vvedeniye v minimaks. // M., Nauka, 1972. — S. 368.
- Измаилов А.Ф. Чувствительность в оптимизации. — М.: Физматлит, 2006. — 245 С.
- Izmailov A.F. Chuvstvitel'nost' v optimizatsii. — M.: Fizmatlit, 2006. — 245 S.
- Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации. М.: Наука, 1991. — 168 С.
- Nurminskiy Ye.A. Chislennyye metody vupukloy optimizatsii. M.: Nauka, 1991. — 168 S.
- Умнов Е.А., Умнов А.Е. Параметрические задачи в математическом программировании. М.: МФТИ, 2018. — 297 С. //www.umnov.ru.
- Umnov Ye.A., Umnov A.Ye. Parametricheskiye zadachi v matematicheskom programmirovanii. M.: MFIT, 2018. — 297 S. //www.umnov.ru.
- Умнов А.Е., Умнов Е.А. Использование функций обратных связей в задачах линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 10. С. 1681–1694.
- Umnov A.Ye., Umnov Ye.A. Ispol'zovaniye funktsiy obratnykh svyazey v zadachakh lineynogo programmirovaniya // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 2019. T. 59, № 10. S. 1681–1694.

- Федоров В.В.* Численные методы максимина. // М. Наука. 1979. 279 С.  
*Fedorov V.V.* Chislennyye metody maksimina. // M. Nauka. 1979. 279 S.
- Федорюк М.В.* Метод перевала. // М. Наука. 1977. 368 С.  
*Fedoryuk M.V.* Metod perevala. // M. Nauka. 1977. 368 S.
- Danskin J.* The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problems. // N.Y. Springer. 1967.
- Fiacco A.V., McCormick G.P.* Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. // N.Y. : John Wiley and Sons, 1968. – 210 с.
- Rockafellar T.* Convex Analysis. // Prinseton University Press. 1970. v.3.
- Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Feedback Functions in Problems of Nonlinear Programming. // SCIREA Journal of Mathematics, 2022, Volume 7, Issue 5, PP 67-82, DOI: 10.54647/mathematics11348
- Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Использование функций обратных связей для решения задач параметрического программирования // Компьютерные исследования и моделирование, 2023, т. 15, № 5, с. 1125-1151 DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1125-1151
- Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Using feedback functions to solve parametric programming problems // Computer Research and Modeling, 2023, vol. 15, no. 5, pp. 1125-1151 DOI: 10.20537/2076-7633-2023-15-5-1125-1151