

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Задачей *математического программирования* принято называть задачу:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать } F(x) \text{ по } x \in E^n \\ &\text{при условиях: } f_i(x) \leq 0 \quad i = \overline{1, m} \end{aligned}$$

или, в координатной форме,

найти максимум $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ по $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$,
при условиях:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 0, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 0, \\ \dots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 0. \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если функции $F(x)$ и $f_i(x) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}$ линейные, то задачу математического программирования называют задачей *линейного программирования*.

В дальнейшем мы будем использовать следующую конкретную форму постановки задач линейного программирования.

$$\begin{aligned} \text{Найти максимум} \quad & \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j \quad \text{по} \quad \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \in E^n, \\ \text{при условиях:} \quad & \xi_j \geq 0, \quad j = [1, n], \\ & -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq 0, \quad i = [1, m]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Множество элементов $x \in E^n$, удовлетворяющих всем ограничениям задачи (1.1), будем обозначать R .

Определение 1.1. Принято говорить, что

- элемент $x^0 \in E^n$ *допустимым*, если на нем выполнены *все* ограничения задачи ЛП, то есть, $x^0 \in R$;
- ограничение типа "неравенство" задачи ЛП на элементе $x^0 \in E^n$ называется *активным*, если на этом x^0 данное ограничение нарушено, или выполняется как равенство;
- если задача ЛП имеет хотя бы один допустимый элемент, то задача ЛП называется *совместной*. Иначе говорят, что задача ЛП *несовместна*.
- ограниченный элемент x^* называется *решением*, если он удовлетворяет всем ограничениям, а целевой функционал имеет на нем экстремальное значение. Сама задача ЛП в этом случае называется *совместной*.
- ограниченное решение x^* задачи ЛП называется *неопределенным*, если число ограничений, активных на x^* , больше, чем размерность пространства E^n ;

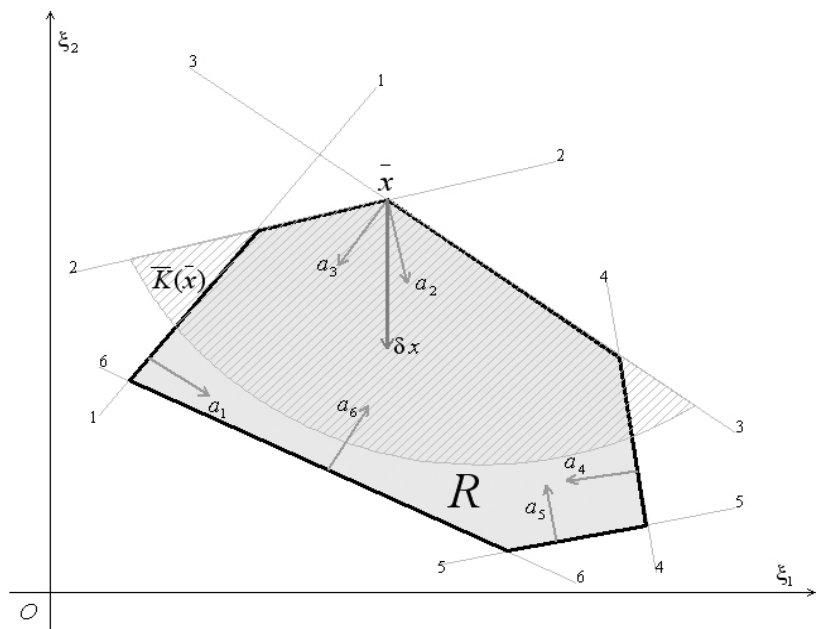


Рис. 1.1.

Для выбранного граничного элемента $\bar{x}$ (рис. 1.1) активными являются ограничения с индексами 2 и 3. Остальные ограничения на этом элементе неактивны. Множество *допустимых элементов* R отмечено серым цветом, а конус *допустимых направлений* $\bar{K}(\bar{x})$ заштрихован.

Условие *оптимальности* элемента $\bar{x}$ геометрически означает, что любая допустимая вариация δx на элементе $\bar{x}$ является в E^2 вектором, образующим не тупой угол со всеми нормальными, ориентированными внутрь R , векторами *всех активных* на $\bar{x}$ ограничениях.

Вариация δx называется *улучшающей* для элемента $\bar{x}$, если

$$F(x + \delta x) > F(x) .$$

Как решаются задачи линейного программирования

Проиллюстрируем применение описанной схемы для следующей задачи линейного программирования:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4 :

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 4],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

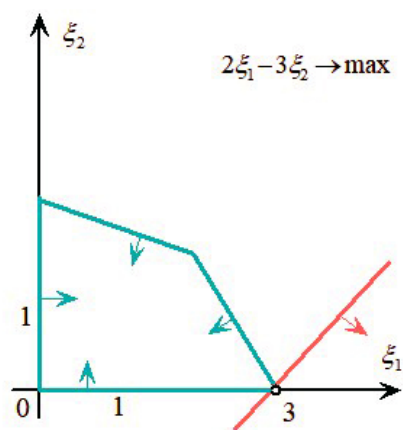
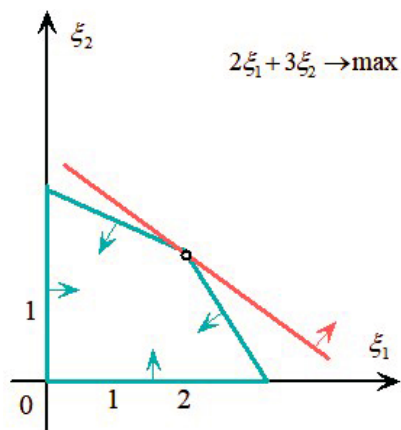
Пусть $\|x'\| = \|\xi_1 \quad \xi_2\|^T$, тогда в силу двух последних равенств и условия неотрицательности переменных,

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Что в свою очередь приводит к выражению для функционала

$$2\xi_1 + 3\xi_2 = 10 - \frac{4}{3}\xi_3 - \frac{1}{3}\xi_4,$$

из которого в силу неотрицательности ξ_3 и ξ_4 получаем, что *максимальное* значение функционала равно 10 на элементе $\|x^*\| = \|2 \quad 2\|^T$.



На практике процедура решения часто оказываться более сложной. Пусть, например, требуется:

найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

при условиях: $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6$,

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4 :

Найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях: $\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 4]$,

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть снова $\|x'\| = \|\xi_1 \quad \xi_2\|^T$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = -2 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4.$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4 , оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

$$\xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 \geq 0.$$

Откуда $\xi_3 \leq 3$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 имеют вид

$$\xi_1^* = 3; \quad \xi_2^* = 0; \quad \xi_3^* = 3; \quad \xi_4^* = 0.$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала равно 6.

**Случай переопределенного решения
задачи линейного программирования.**

Решение задачи ЛП, как точка в E^n может однозначно определяться n линейно независимыми линейными ограничениями типа равенство. Но в принципе таких ограничений может быть и больше.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} &\text{найти максимум } 2\xi_1 - 3\xi_2 \text{ на } \{\xi_1, \xi_2\} \in E^2, \\ &\quad \xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2], \\ \text{при условиях: } &\xi_1 + 2\xi_2 \leq 3, \\ &2\xi_1 + \xi_2 \leq 6. \end{aligned}$$

Опять же приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4 :

$$\begin{aligned} &\text{Найти максимум } 2\xi_1 - 3\xi_2 \text{ на } \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4, \\ \text{при условиях: } &\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 4], \\ &\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 3, \\ &2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6. \end{aligned}$$

Пусть снова $\|x'\| = \|\xi_1 \quad \xi_2\|^T$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 3 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = 6 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4.$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4 , оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 3 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

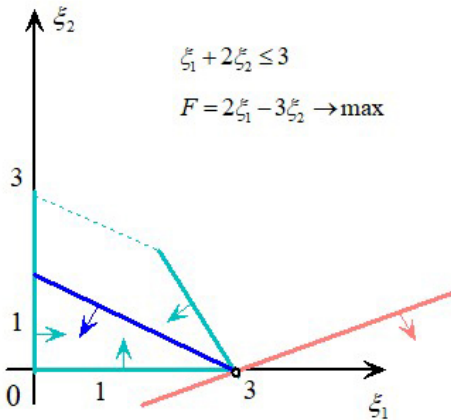
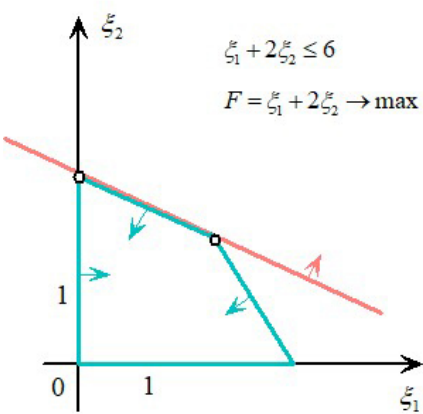
вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

$$\xi_2(\xi_3, \xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 \geq 0.$$

Откуда $0 \leq \xi_3 \leq 0 \Rightarrow \xi_3 = 0$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 3; \quad \xi_2^* = 0; \quad \xi_3^* = 0; \quad \xi_4^* = 0.$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала равно 6. Но при этом число активных в точке решения ограничений равно $3 > n = 2$. Переопределенность!



**Случай неединственного решения
задачи линейного программирования.**

Решение задачи ЛП, как точка в E^n может однозначно определяться n линейно независимыми линейными ограничениями типа равенство. Но в некоторых случаях с таких ограничений может быть и меньше, чем n .

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} &\text{найти максимум } \xi_1 + 2\xi_2 \text{ на } \{\xi_1, \xi_2\} \in E^2, \\ &\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2], \\ \text{при условиях: } &\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6, \\ &2\xi_1 + \xi_2 \leq 6. \end{aligned}$$

Опять же приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4 :

$$\begin{aligned} &\text{Найти максимум } \xi_1 + 2\xi_2 \text{ на } \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4, \\ \text{при условиях: } &\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 4], \\ &\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6, \\ &2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6. \end{aligned}$$

Пусть снова $\|x\| = \|\xi_1 \quad \xi_2\|^T$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$F = \xi_1 + 2\xi_2 = 6 - \xi_3 + 0 \cdot \xi_4.$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_3 , оптимальное значение ξ_3 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_4 на значение целевого функционала влиять не будет.

Допустимые значения ξ_4 очевидно существуют. Например 0. Но любое ли неотрицательное значение может быть у ξ_4 в этой задаче?

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_3 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_4

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Откуда $0 \leq \xi_4 \leq 3$.

Используем параметрическую форму записи ответа. Для этого положим

$$\xi_4 = t, \quad 0 \leq t \leq 3. \quad \text{Тогда получаем, что}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 - \frac{2}{3}t \\ \xi_2 &= 2 + \frac{1}{3}t \end{aligned}$$

И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 2 - \frac{2}{3}t; \quad \xi_2^* = 2 + \frac{1}{3}t; \quad \xi_3^* = 0; \quad \xi_4^* = t.$$

при любом $0 \leq t \leq 3$. Наконец, максимальное значение целевого функционала равно

$$F^* = \left(2 - \frac{2}{3}t\right) + 2\left(2 + \frac{1}{3}t\right) = 6 \quad \forall t \in [0, 3].$$

Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую пару задач :

прямую задачу:

найти максимум $\sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j$ на $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \in E^n$,

при условиях:

$$\xi_j \geq 0, j = [1, n], \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \leq \beta_i, \quad i = [1, m]$$

и **двойственную задачу:**

найти минимум $\sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i$ на $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \in E^m$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0, i = [1, m], \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_j, \quad j = [1, n].$$

Основные правила, связывающие условия прямой и двойственной задач таковы:

Если в условии <i>прямой</i> задачи	то в условии <i>двойственной</i> задачи
Найти максимум	Найти минимум
Найти минимум	Найти максимум
Число переменных	Число ограничений
Число ограничений	Число переменных
j -ый коэффициент целевого функционала	правая часть j -го неравенства
правая часть i -го неравенства	i -ый коэффициент целевого функционала
j -ый столбец в матрице ограничений	j -ая строка в матрице ограничений
i -ая строка в матрице ограничений	i -ый столбец в матрице ограничений

Заметим, что в силу этих правил задача двойственная к двойственной является прямой задачей.

Теоремы двойственности в линейном программировании

Для каждой пары взаимодвойственных задач верна

Теорема 1.1 Если $\|x^*\| = \|\xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \dots \quad \xi_n^*\|^T$ – решение прямой задачи, а $\|\Lambda^*\| = \|\lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \dots \quad \lambda_m^*\|^T$ – решение двойственной задачи, то справедливы равенства:

1°. *основное соотношение двойственности*

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i^*;$$

2°. *соотношения дополняющей нежесткости*

$$\lambda_i^* (-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j^*) = 0; \quad \forall i = [1, m],$$

$$\xi_j^* (-\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i^*) = 0; \quad \forall j = [1, n].$$

Следствие : метод "малых вариаций".

$$\text{Пусть } F^* = \sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i^*,$$

$$\text{тогда } \frac{\partial F^*}{\partial \beta_i} = \lambda_i^*.$$

$$\text{Или, приближенно, } \lambda_i^* \approx \frac{\Delta F^*}{\Delta \beta_i}.$$

Свойства пары взаимодвойственных задач ЛП

Основное соотношение двойственности и условия дополняющей нежесткости являются базовыми свойствами взаимодвойственной пары задач. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Теорема
1.2.

Если x^* и Λ^* допустимые элементы пары взаимодвойственных задач такие, что

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i^*,$$

то x^* и Λ^* – решения этих задач.

Для пары взаимодвойственных задач имеет место следующая (подтверждаемая примерами) альтернатива:

а) обе задачи имеют решение: прямая

Найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$$

с решением $\xi_1^* = 2, \xi_2^* = 2, F^* = 10$

и

двойственная

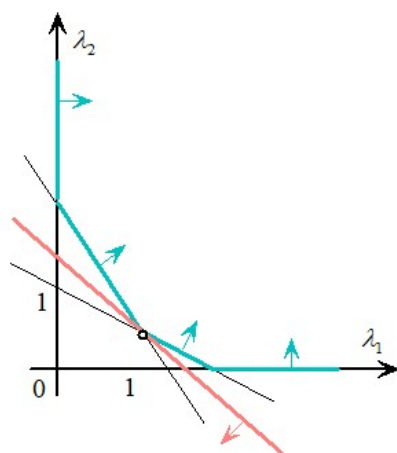
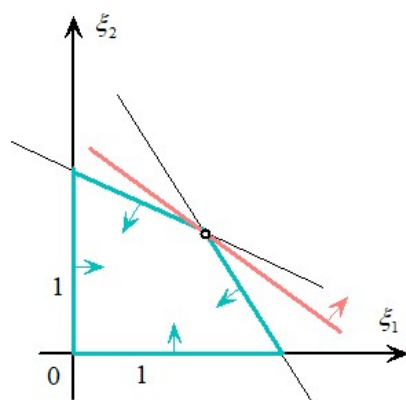
Найти минимум $G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ по $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}, G^* = 10$.



б) обе задачи несовместны:

найти максимум $F = \xi_1 + 3\xi_2$ по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\begin{aligned}\xi_i &\geq 0, \quad j = [1, 2], \\ \xi_1 - \xi_2 &\leq 3, \\ -\xi_1 + \xi_2 &\leq -4.\end{aligned}$$

и

найти минимум $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ по $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\begin{aligned}\lambda_i &\geq 0, \quad j = [1, 2], \\ \lambda_1 - \lambda_2 &\geq 1, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3.\end{aligned}$$

в) одна задача совместна, а другая – нет:

найти максимум $F = \xi_1$ по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 - \xi_2 \leq 1,$$

с неограниченным целевым функционалом на множестве допустимых состояний

и

найти минимум $G = \lambda_1$ по $\{\lambda_1\} \in E^1$,

при условиях:

$$\lambda_1 \geq 0,$$

$$\lambda_1 \geq 1,$$

$$-\lambda_1 \geq 0,$$

которая несовместна.

Обратите внимание, что согласно определению 4.1.1 первая из задач в пункте в) решений не имеет. Этот факт обобщает

Единственность и переопределенность решений взаимодвойственных задач ЛП

Рассмотренные выше утверждения справедливы как случаев единственного, так и неединственного решения задачи ЛП.

Следующая теорема позволяет делать заключение о числе этих решений.

Теорема 1.3.	Если одна из взаимодвойственных задач имеет <i>единственное, переопределенное</i> решение, то другая задача имеет <i>неединственное</i> решение.
-----------------	---

Отметим также, что возможен случай, когда обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение. Проиллюстрируем два последних утверждения примерами.

- а) прямая задача переопределена, а двойственная имеет неединственное решение:

найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 3$$

с решением $\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 3, F^* = 9$

В этом случае на элементе x^* активными являются ограничения

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_1 + 2\xi_2 \leq 6, \quad 2\xi_1 + \xi_2 \leq 3.$$

а, поскольку их число $3 > \dim(E^2) = 2$, то это решение *переопределенное*,

и

двойственная задача с *неединственным* решением

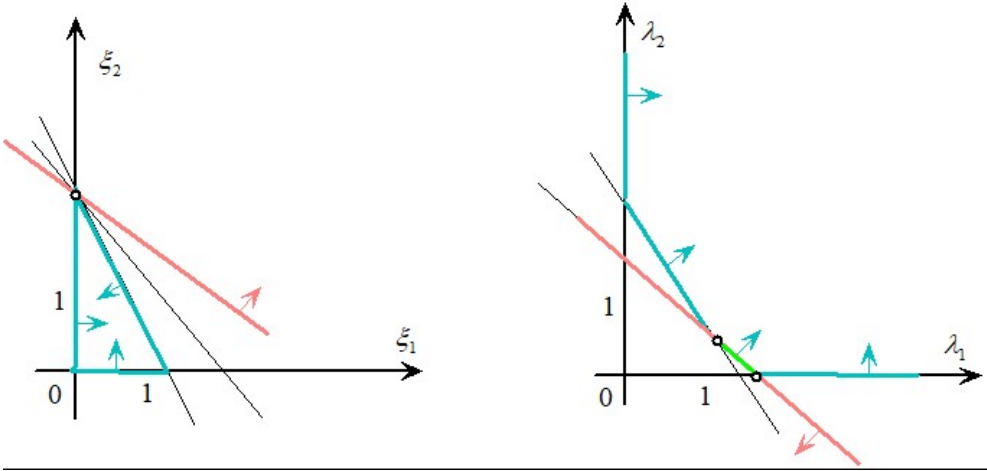
найти минимум $G = 6\lambda_1 + 3\lambda_2$ по $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = t; t \in [0, \frac{4}{3}]; \lambda_2^* = 3 - 2t; G^* = 9.$



б) обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение:

найти максимум $F = \xi_1 + 2\xi_2$ по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$2\xi_1 + 4\xi_2 \leq 4,$$

$$3\xi_1 + 6\xi_2 \leq 6,$$

с решением $\xi_1^* = t; t \in [0, 2]; \quad \xi_2^* = 1 - \frac{1}{2}t; \quad F^* = 2.$

и двойственная задача

найти минимум $G = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$ по $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \geq 0, \quad j = [1, 2],$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 1,$$

$$4\lambda_1 + 6\lambda_2 \geq 2,$$

с решением $\lambda_1^* = t; t \in [0, \frac{1}{2}]; \quad \lambda_2^* = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t; \quad G^* = 2.$

Общая постановка задачи параметрического программирования

Пусть $x \in E^n$ – вектор переменных и $u \in E^k$ – вектор параметров являются элементами конечномерных евклидовых пространств соответственно с координат-

ными представлениями $\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\|$ и $\|u\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_k \end{pmatrix} \right\|$.

Рассмотрим следующую задачу, которую принято называть *задачей параметрического программирования*:

$$\text{найти } \max_x F(x, u) \tag{1.3}$$

$$\text{при условиях: } f_i(x, u) \leq 0, \quad i = [1, m],$$

и пусть x_u^* есть решение задачи (1.3) для некоторого фиксированного $u \in \Omega \subseteq E^k$.

Любую задачу, в формулировке которой используется x_u^* , будем называть задачей в пространстве параметров или параметрической задачей верхнего уровня.

Например, задачу

$$\max_u F(x_u^*, u) \text{ при условии } u \in \Omega. \quad (1.4)$$

В отличие от задач этого типа, задачу (1.3) будем называть задачей "нижнего уровня".

Свойства решений задач параметрического программирования

Пусть x_u^* есть решение задачи (1.3) для фиксированного u , а задача верхнего уровня сформулирована в виде

$$\max_u F(x_u^*, u) \quad u \in \Omega,$$

где $F(x, u)$ – некоторая функция, зависящая как от $x \in E^n$, так и от $u \in E^k$.

Как постановка, так и процедура решения задачи (1.4) *могут* в значительной степени осложняться следующими специфическими свойствами зависимости x_u^* .

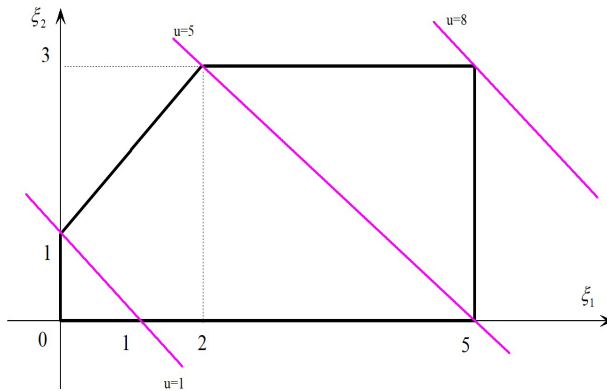
1. Практической *невозможностью* (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи нижнего уровня (1.3), а, значит, также и постановки, исследования и решения в явном виде задачи верхнего уровня (1.4).
2. Несовпадением в общем случае области определения зависимости x_u^* и множества Ω , поскольку система условий задачи нижнего уровня (1)–(2) может оказаться *противоречивой* для некоторых $u \in \Omega \subseteq E^l$.
3. *Нефункциональностью* (неоднозначностью) зависимости x_u^* для тех $u \in \Omega \subseteq E^l$, при которых задача нижнего уровня (1.3) имеет решение, но не *единственное*.
4. *Негладкостью* зависимости x_u^* в силу того, что условия задачи "нижнего уровня" (1.3) могут содержать ограничения типа *неравенство*. Более того, даже существование непрерывных производных у функций $f(x, u)$ и $y_s(x, u)$ достаточно высокого порядка не гарантирует необходимой гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости x_u^* и, следовательно, входящих в формулировку задачи верхнего уровня, условий.

Причины, порождающие подобные свойства можно проиллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования:

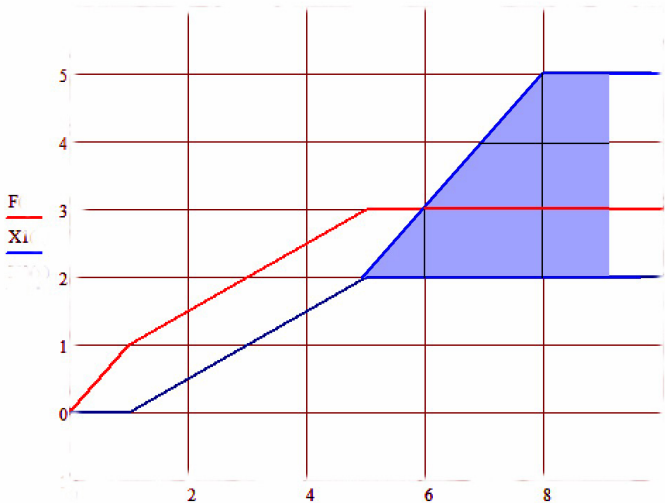
$\forall u \in \mathbf{R}$ максимизировать по $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in E^2$ функцию $F = \xi_2$

при условиях: $0 \leq \xi_1 \leq 5, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 3,$
 $\xi_1 - \xi_2 \geq -1, \quad \xi_1 + \xi_2 \leq u.$



Решение этой задачи представляется зависимостями

u	F_u^*	ξ_{1u}^*	ξ_{2u}^*
$(-\infty, 0)$	не суц.	не суц	не суц
$[0, 1)$	u	0	u
$[1, 5)$	$\frac{u+1}{2}$	$\frac{u-1}{2}$	$\frac{u+1}{2}$
$[5, 8]$	3	$\forall [2, u-3]$	3
$(8, +\infty)$	3	$\forall [2, 5]$	3



В качестве иллюстрации приведем еще один пример.

1. Задача *нижнего уровня* - задача линейного программирования с нелинейно входящими в ее условие параметрами, для которой $\|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}$ и

$$\|u\| = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} - \text{координатные представления векторов } x \in E^2 \text{ и } u \in E^2.$$

Требуется решить задачу:

$$\text{найти } \max_x 2\xi_1 + 3\xi_2$$

$$\text{при условиях: } \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0,$$

$$\xi_1 + v_1 \xi_2 \leq 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq v_2,$$

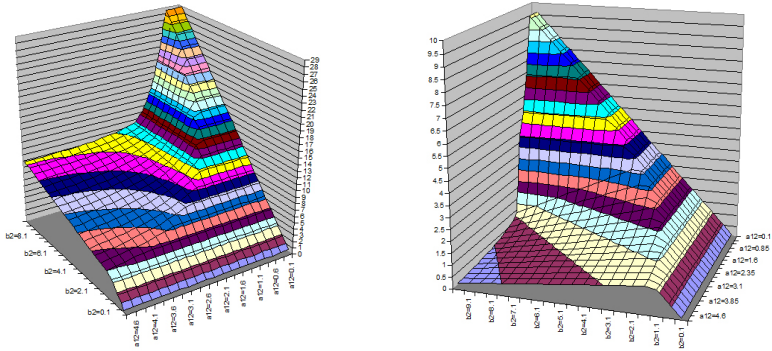
решение которой представляется зависимостями ξ_{v_1, v_2}^* и ξ_{v_1, v_2}^* .

2. Задача верхнего уровня:

$$\max_u 2\xi_{1,\nu_1,\nu_2}^* + 3\xi_{2,\nu_1,\nu_2}^*$$

при условиях:

$$0.1 \leq \nu_1 \leq 5, \quad 0.1 \leq \nu_2 \leq 10.$$



На этих рисунках приведены графические представления зависимостей соответственно

$$2\xi_{1,v_1,v_2}^* + 3\xi_{2,v_1,v_2}^* \quad \text{и} \quad \xi_{2,v_1,v_2}^*$$

от $\{v_1, v_2\}$ – компонент вектора $u \in \Omega$, которые позволяют заключить, что данные зависимости непрерывные, нелинейные, невыпуклые и не дифференцируемые для всех $u \in \Omega$, а задача нижнего уровня имеет неединственное решение.