

3. Элементы выпуклого анализа

3.1. Проекция элемента на подмножество

Определение 3.1.1 Проекцией элемента $x^0 \in E^n$ на выпуклое подмножество $\Omega \subset E^n$ называется элемент $\bar{x} \in \Omega$ такой, что $\left| x^0 - \bar{x} \right| = \inf_{x \in \Omega} \left| x^0 - x \right|$.

Неотрицательное число $\rho \equiv \inf_{x \in \Omega} \left| x^0 - x \right|$ называется расстоянием от элемента x^0 до подмножества Ω .

Основные свойства проекций и расстояний от элемента до подмножества в E^n могут быть сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 3.1.1 Для любого выпуклого замкнутого множества $\Omega \subset E^n$ и любого элемента $x^0 \in E^n$ существует единственный элемент $\bar{x} \in \Omega$, являющийся проекцией x^0 на Ω .

Доказательство.

Докажем существование проекции.

Если $x^0 \in \Omega$, то $\bar{x} = x^0$ и $\rho = 0$.

Пусть теперь $x^0 \notin \Omega$ и существует число $\rho = \inf_{x \in \Omega} |x^0 - x|$, тогда по определению точной нижней грани существует ограниченная последовательность элементов $\{x_k\} \subset \Omega$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x^0 - x_k| = \rho.$$

Например, для которой $\rho \leq |x^0 - x_k| \leq \rho + \frac{1}{k}$.

Но, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\} \subset \Omega$.

Если при этом $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = \bar{x}$, то в силу замкнутости Ω элемент $\bar{x} \in \Omega$, и для него справедливо равенство $\rho = |x^0 - \bar{x}|$. То есть, $\bar{x}$ – проекция x^0 на Ω .

Покажем теперь, что проекция *единственна*.

Без ограничения общности будем считать, что $x^0 = 0$, и предположим противное: пусть в Ω существуют неравные элементы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, для которых $|\bar{x}_1| = |\bar{x}_2| = \rho$.

Рассмотрим два элемента: $y = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}$ и $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2}$, для которых очевидны равенства $\bar{x}_1 = y + z$ и $(y, z) = 0$. Тогда

$$\rho^2 = (\bar{x}_1, \bar{x}_1) = (y + z, y + z) = |y|^2 + |z|^2$$

и, следовательно, $|y|^2 < \rho^2$, поскольку согласно сделанному предположению $z \neq 0$.

Наконец, учитывая, что в силу выпуклости Ω элемент

$$y = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \in \Omega,$$

приходим к противоречию с определением 3.1.1, что и доказывает единственность проекции.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.2 Для того чтобы элемент $\bar{x} \in \Omega$ являлся проекцией элемента x^0 на выпуклое замкнутое множество Ω , необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$(x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) \leq 0.$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть $\bar{x} \in \Omega$ – проекция x^0 на Ω , тогда элемент

$$y = \alpha x + (1 - \alpha)\bar{x} \in \Omega, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{при} \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Для этого элемента справедлива оценка

$$\begin{aligned} |x^0 - y|^2 &= |x^0 - (\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x})|^2 = \\ &= |(x^0 - \bar{x}) - \alpha(x - \bar{x})|^2 = \\ &= |x^0 - \bar{x}|^2 - 2\alpha(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) + \alpha^2|x - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

В силу определения 3.1.1 $|x^0 - y|^2 \geq |x^0 - \bar{x}|^2$. А это в свою очередь означает, что

$$-2\alpha(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) + \alpha^2|x - \bar{x}|^2 \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

При $\alpha = 0$ $y = \bar{x}$ т.е. неравенство $|x^0 - y|^2 \geq |x^0 - \bar{x}|^2$ очевидно верное.

Пусть $\alpha \in (0,1]$, тогда имеем

$$(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{2}|x - \bar{x}|^2 \quad \forall \alpha \in (0,1].$$

Здесь левая часть неравенства от α не зависит, а правая стремится к нулю при $\alpha \rightarrow +0$.

Поскольку нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе, то получаем при фиксированном $x \in \Omega$

$$(x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) \leq 0 \quad \text{или} \quad (x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) \leq 0.$$

Докажем достаточность.

Пусть $\forall x \in \Omega$ справедливо неравенство

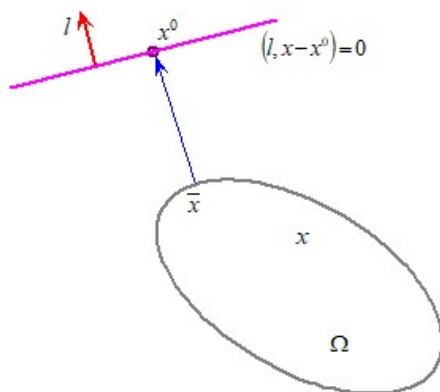
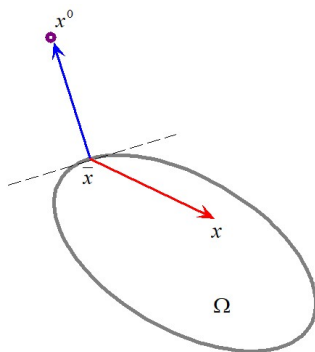
$$(x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) \leq 0.$$

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |x - x^0|^2 &= |(x - \bar{x}) - (x^0 - \bar{x})|^2 = \\ &= |x - \bar{x}|^2 - 2(x - \bar{x}, x^0 - \bar{x}) + |x^0 - \bar{x}|^2 \geq |x^0 - \bar{x}|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент $\bar{x} \in \Omega$ является проекцией элемента x^0 на Ω .

Теорема доказана.



3.2. Условия отделимости выпуклых подмножеств

Определение 3.2.1. Непустое множество Ω , образованное из элементов линейного пространства Λ , называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ

$$1) \quad x + y \in \Omega,$$

$$2) \quad \lambda x \in \Omega.$$

Определение 3.2.2. Множество Γ , образованное из элементов вида $x + x_0$, где x_0 есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства Λ , а x – любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ .

При построении и обосновании различных методов исследования математических моделей в E^n важную роль играют следующие теоремы.

Теорема 3.2.1 Пусть $\Omega \subset E^n$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда $\forall x^0 \notin \bar{\Omega}$ существует *отделяющая* гиперплоскость

$$(l, x - x^0) = 0 \quad \text{с } l \neq 0$$

такая, что $(l, x - x^0) < 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Доказательство.

Пусть элемент $\bar{x}$ является проекцией элемента x^0 на Ω . Выберем гиперплоскость $(l, x - x^0) = 0$ с ненулевым (в силу $\forall x^0 \notin \bar{\Omega}) \quad l = x^0 - \bar{x}$, тогда, используя утверждение теоремы 3.1.2 и равенство

$$x - x^0 = (x - \bar{x}) - l,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} (l, x - x^0) &= \\ &= (x^0 - \bar{x}, x - x^0) = (x^0 - \bar{x}, x - \bar{x}) - (l, l) < 0, \end{aligned}$$

так как $l \neq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2.2 Пусть $\Omega \subset E^n$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда для любого граничного элемента $\bar{x}$ этого множества существует *опорная* гиперплоскость

$$(l, x - \bar{x}) = 0 \quad \text{с } l \neq 0$$

такая, что $(l, x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega.$

Доказательство.

Согласно определению граничного элемента множества $\Omega \subset E^n$ существует последовательность элементов $\{x_{(k)}\}$ таких, что:

$$1^\circ. \quad x_{(k)} \notin \bar{\Omega} \quad \forall k;$$

$$2^\circ. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{(k)} = \bar{x};$$

По теореме 3.2.1 для каждого k существует гиперплоскость $(l_{(k)}, x - x_{(k)}^0) = 0$ такая, что:

$$3^\circ. \quad l_{(k)} = \frac{x_{(k)} - \bar{x}}{|x_{(k)} - \bar{x}|};$$

$$4^\circ. \quad (l_{(k)}, x - x_{(k)}^0) < 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

откуда следует, что

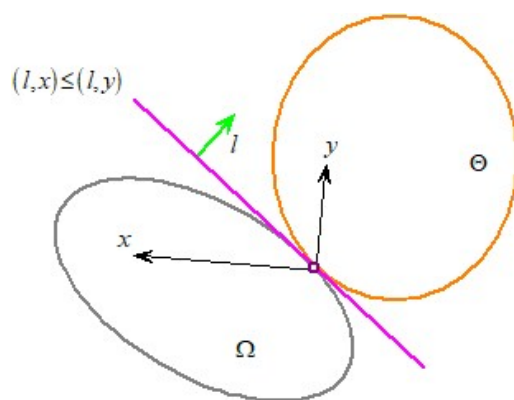
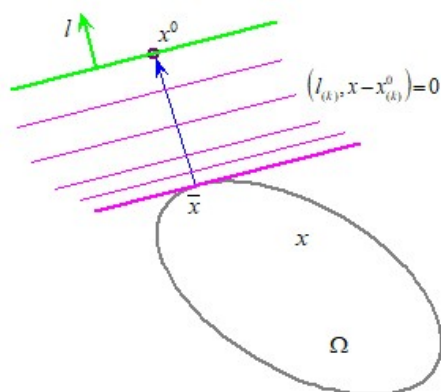
$$(l_{(k)}, x - x_{(k)}^0) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

В силу предположения о сходимости $\{x_{(k)}\}$ будет сходиться и $\{l_{(k)}\}$. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} l_{(k)} = l$, тогда, принимая во внимание, что предельный переход не нарушает нестрогих неравенств (теорема "о двух милиционерах"), из $\lim_{k \rightarrow \infty} (l_{(k)}, x - x_{(k)}^0) \leq 0$ получаем

$$(l, x - \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

то есть, гиперплоскость $(l, x - \bar{x}) = 0$ – опорная.

Теорема доказана.



Из курса выпуклого анализа известно, что:

1°. Если $\Omega \subset E^n$ – выпуклое множество, то множества $\overline{\Omega}$ и $\text{int } \Omega$ также выпуклы.

2°. Если $\Omega \subset E^n$ и $\Theta \subset E^n$ – выпуклые множества, то множества

$$\Omega \pm \Theta = \{x \in E^n : x = x_1 \pm x_2, \forall x_1 \in \Omega, \forall x_2 \in \Theta\}$$

также выпуклы.

Теорема
3.2.3
(О разделяющей
гиперплоскости)

Пусть $\Omega \subset E^n$ и $\Theta \subset E^n$ – выпуклые множества такие, что любая внутренняя точка Ω не принадлежит Θ . Тогда существует разделяющая множества Ω и Θ гиперплоскость

$$(l, y - x) = 0 \quad \text{с} \quad l \neq 0$$

такая, что

$$(l, y - x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{и} \quad \forall y \in \Theta.$$

Доказательство.

Рассмотрим множество $\Theta - \text{int } \Omega$, состоящее из элементов вида $y - x$, $\forall x \in \text{int } \Omega$ и $\forall y \in \Theta$. Это множество выпуклое и не содержит по условию теоремы нулевого элемента.

Тогда в силу теорем 3.2.1 и 3.2.2 для каждого его внешнего элемента $y^0 - x^0$ существует гиперплоскость

$$(l, (y - x) - (y^0 - x^0)) = 0 \quad \text{с} \quad l \neq 0$$

такая, что $(l, (y - x) - (y^0 - x^0)) \leq 0$.

Поскольку элемент $y^0 - x^0 = 0$ для рассматриваемого множества является внешним, то будет справедлива оценка $(l, y - x) \leq 0$.

Наконец, включив путем соответствующего предельного перехода (не нарушающего нестрогие неравенства) в рассмотрение граничные точки множества Ω , получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

3.3. Теорема Фаркаша

Теорема
3.3.1
(Фредгольма).

Для того чтобы система $\|A\| \|x\| = \|b\|$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение $\|y\|$ сопряженной системы

$$\|A\|^T \|y\| = \|o\|$$

удовлетворяло условию

$$\|b\|^T \|y\| = 0.$$

Доказательство необходимости.

Пусть система уравнений (6.6.1) совместна, то есть для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\| = \|A\| \|x\|$.

Тогда, вычисляя произведение $\|b\|^T \|y\|$ в предположении, что

$\|A\|^T \|y\| = \|o\|$, получаем

$$\|b\|^T \|y\| = (\|A\| \|x\|)^T \|y\| = \|x\|^T \|A\|^T \|y\| = \|x\|^T \|o\| = 0.$$

Доказательство достаточности.

Пусть $\|b\|^T \|y\| = 0$ для *любого* решения системы линейных уравнений $\|A\|^T \|y\| = \|o\|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений

$$\|A\|^T \|y\| = \|o\| \quad \text{и} \quad \begin{cases} \|A\|^T \|y\| = \|o\|, \\ \|b\|^T \|y\| = 0 \end{cases}$$

совпадают, и для этих систем максимальное число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно известным теоремам из курса линейной алгебры,

$$m - \operatorname{rg} \|A\|^T = m - \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T \quad \text{или} \quad \operatorname{rg} \|A\|^T = \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T,$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\operatorname{rg} \|A\| = \operatorname{rg} \|A|b\|$, означающее в силу теоремы Кронекера-Капелли совместность системы линейных уравнений $\|A\| \|x\| = \|b\|$.

Теорема доказана.

Теорема
3.3.2.
(Фаркаша)

Для того чтобы $\|A\|x = \|b\|$ – система m линейных уравнений с n неизвестными имела неотрицательное частное решение (то есть, решение $\|x^0\| \geq \|o\|$), необходимо и достаточно, чтобы $\|y\|$ – каждое частное решение сопряженной системы линейных неравенств

$$\|A\|^T \|y\| \leq \|o\|$$

– удовлетворяло условию

$$\|b\|^T \|y\| \leq 0.$$

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть система линейных уравнений $\|A\|x\| = \|b\|$ имеет "неотрицательное" частное решение, то есть, покомпонентно удовлетворяющее условию $\|x^0\| \geq \|o\|$. Покажем, что в этом случае для каждого решения системы линейных неравенств

$$\|A\|^T \|y\| \leq \|o\|$$

выполнено условие $\|b\|^T \|y\| \leq 0$. Действительно,

$$\|b\|^T \|y\| = (\|A\|x^0\|)^T \|y\| = \|x^0\|^T (\|A\|^T \|y\|) \leq 0,$$

поскольку n -компонентная строка с неотрицательными элементами $\|x^0\|^T$ умножается справа на n -компонентный столбец $\|A\|^T \|y\|$ с неположительными элементами.

Докажем достаточность.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное отображение вида $\tilde{A}: E^n \rightarrow E^m$, столбцы $\|b\|, \|y\|$ задают элементы $b, y \in E^m$, а столбцы $\|x\|, \|x^0\|$ – элементы $x, x^0 \in E^n$. Обозначим через Ω множество всех элементов $v \in E^m$ таких, что $v = \tilde{A}x \quad \forall x \geq 0$.

Оно очевидно (?) выпуклое. Как показать, что из $\begin{cases} v_1 \in \Omega, \\ v_2 \in \Omega \end{cases}$ следует

$$\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1] ?$$

Если для *каждого* решения системы линейных неравенств $\|A\|^T \|y\| \leq \|o\|$ выполнено условие $\|b\|^T \|y\| \leq 0$ и при этом $b \in \Omega$, то достаточность доказана.

Допустим, что $b \notin \Omega$.

Покажем, что в этом случае *не для каждого* решения сопряженной системы линейных неравенств $\|A\|^T \|y\| \leq \|o\|$ выполнено условие $\|b\|^T \|y\| \leq 0$.

Действительно, пусть элемент $u \in \Omega \subset E^m$ – проекция b на Ω .

Заметим, что здесь (без доказательства) мы предположили замкнутость Ω , которая гарантирует существование проекции.

Тогда для элемента $y' = b - u$ справедливы оценки:

1°. В силу теоремы 3.2.1 (об отделяющей гиперплоскости) $(y', v - b) < 0 \ \forall v \in \Omega$, но поскольку $o \in \Omega$, то, в том числе, и $(y', b) > 0$;

2°. По теореме 3.1.2 $(v - u, b - u) \leq 0 \ \forall v \in \Omega$ или $(v - u, y') \leq 0 \ \forall v \in \Omega$.

Очевидно (?), что элемент $v + u$ также будет принадлежать множеству Ω . Тогда из последнего неравенства получаем $(v, y') \leq 0 \ \forall v \in \Omega$. Откуда следует оценка

$$(v, y') = (\bar{A}x, y') = (x, \bar{A}^+ y') \leq 0 \quad \forall x \geq o.$$

В силу произвольности $\|x\| \geq \|o\|$ имеем $\|\tilde{A}^+ y'\| \leq \|o\|$. То есть из $b \notin \Omega$ вытекает (?) существование y' такого, что

$$\begin{cases} \|A\|^T \|y'\| \leq \|o\|, \\ \|b\|^T \|y'\| > 0, \end{cases}$$

поскольку $\|\tilde{A}^+\|_e = \|A\|^T$.

Теорема доказана.