

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### Основные понятия и определения

Полезность математического моделирования заключается в возможности получения информации о свойствах и характере поведения изучаемого объекта без проведения (часто сложных или дорогостоящих) экспериментов в натуре, что может оправдывать затраты на преодоление затруднений, возникающих в процессе разработки или при попытках использования математических моделей.

Основная проблема математического моделирования заключается в обеспечении *адекватности* этой модели исследуемому объекту. Другими словами, пользователь должен быть уверен, что данная модель точно отражает реальную ситуацию и что количественные оценки получаемые в процессе работы с этой моделью достаточно надежные.

Опыт математического моделирования, накопленный в течение последних нескольких десятилетий, показывает, что проблема адекватности в большом числе случаев может быть преодолена. Примером служат многочисленные успешно решенные физические и технические задачи. С другой стороны, попытки применения методов математического моделирования для исследования объектов социально-экономической природы приводят к заключению: несмотря на естественное желание учесть в модели *все* факторы, существенно влияющие на функционирование исследуемого объекта, добиться этого весьма непросто, а иногда даже принципиально невозможно.

Если построение математической модели, учитывающей с достаточной степенью точности все факторы, являющиеся существенными для исследуемого объекта, оказывается невозможным, то следует отказаться от стандартной методологии ее использования и попытаться действовать иным способом, основанном на изменении постановок решаемых задач и включении пользователя в процесс поиска решений.

Предметом дальнейшего рассмотрения в нашем курсе является описание альтернативной методологии математического моделирования, не требующей выполнения условия адекватности в полной мере. Предварительно уточним основные понятия и термины.

Определение  
1.1.

Под *математической моделью* понимается формализованный (то есть, представленный в виде математических соотношений) набор правил, описывающих факторы, существенно влияющие на состояние и функционирование исследуемого объекта, и соответствующее этому набору информационное обеспечение.

Процесс построения и использования математической модели для решения с ее помощью конкретных задач принято называть *математическим моделированием*.

Описание математической модели выполняется в терминах количественных характеристик – *показателей (переменных, неизвестных)*, значения которых нужно найти и *параметров*, величины которых априорно известны.

Значения показателей, как правило, должны удовлетворять системе условий, задаваемых в виде ограничений, связей, целей и т.п., являющихся математической формулировкой существенных факторов.

Определение  
1.2.

Условия, выполнение которых безусловно необходимо, называются *обязательными (необходимыми)*, тогда как условия, выполнение которых желательно, но необязательно, называются *целевыми (желательными)*.

В рамках настоящего курса рассматриваются математические модели, описание которых выполняется при помощи конечного числа показателей и налагаемых на их значения условий.

Набор конкретных значений всех показателей и параметров математической модели называется *состоянием* модели. Набор условий (как обязательных, так и целевых) для конкретного списка показателей и значений параметров будем называть *задачей* для математической модели.

Состояния модели, которые удовлетворяют набору условий задачи, являются ее *решением*. Процедура поиска значений показателей математической модели при заданных конкретных условиях и значениях ее параметров называется *процессом решения задачи*.

Определение  
1.3.

Состояние математической модели (или решение задачи),

- для которого выполнены все обязательные ограничения и условия связи, называется *допустимым* или *совместным*.
- нарушающее хотя бы одно из обязательных ограничений или условий связи между показателями, называется *недопустимым* или *несовместным*.
- удовлетворяющее всем содержащимся в ее описании целевым условиям, называется *желательным* или *целевым*.

Вполне очевидно, что в общем случае может не существовать состояния математической модели, которое было бы одновременно и допустимым, и желательным. В этом случае достаточно часто возникает задача количественной оценки степени нарушения целевых условий для конкретного допустимого состояния.

|                  |                                                                                                                                                                                    |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Определение 1.4. | Допустимое состояние модели, в минимальной (в некоторой, заранее определенной мере) степени нарушающее содержащиеся в ее описании целевые условия, называется <i>оптимальным</i> . |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Наконец, дадим

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Определение 1.5. | Математическую модель, в которой учтены с приемлемой степенью точности <i>все</i> факторы, существенно влияющие на функционирование исследуемого объекта, назовем <i>полной</i> .<br><i>Неполной</i> назовем математическую модель, в состав которой входят <i>только адекватные</i> описания факторов существенно влияющих на функционирование исследуемого объекта, но <i>не всех</i> таких факторов. |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Подчеркнем, что прочие существенные факторы (не формализуемые с достаточной степенью точности или неизвестные вовсе) не включаются в неполную модель.

Таким образом, все факторы, существенно влияющие на функционирование моделируемого объекта, можно разделить на три следующие группы:

- факторы, поддающиеся формализации с приемлемой степенью точности;
- факторы известные, но не формализуемые с необходимой точностью;
- факторы, существенно влияющие на характер функционирования исследуемого объекта, однако неизвестные пользователю.

## **Сравнение использования полных и неполных математических моделей**

Полные математические модели могут применяться для решения задач имитации (прогнозирования) функционирования или оптимизации характеристик исследуемого объекта или явления.

Попытки имитирования поведения исследуемого объекта, построения прогноза, поиска его оптимальных или равновесных состояний для неполных математических моделей являются некорректными.

Некорректность использования методологии полного моделирования может быть обусловлена:

- неточностью математических описаний (формулировок) отдельных элементов модели, например из-за трудностей получения достоверных значений их параметров или неполнотой информационного обеспечения модели;
- неправомерностью применения математического аппарата для формализованного описания некоторых из факторов, существенно влияющих на поведение моделируемого объекта;
- подозрением о наличии неизвестных существенных факторов.

В случае неполной модели можно использовать альтернативные постановки задач, которые могут быть получены, исходя из естественного требования достоверности решений. Скажем, путем замены проверки *достаточных* условий адекватности проверкой выполнения ее *необходимых* условий.

Например, в задачах имитации функционирования некоторого объекта выполнение достаточных условий достоверности позволяет ответить на вопрос: *Что произойдет в том случае, если...*? С другой стороны, выполнение необходимых условий достоверности гарантирует корректность лишь вопроса: *Чего не может произойти в том случае, если...*? Использование вопроса первого типа в случае работы с неполной моделью может приводить к недостоверному результату, в то время, как ответ на второй вопрос всегда будет достоверен.

Действительно, пусть одно из состояний некоторой неполной модели допустимо, а другое – недопустимо. Если в эту модель включить дополнительное адекватное условие (неучтенное в момент получения решений), то решение, идентифицированное ранее как недопустимое, таковым и останется. Допустимое же решение после пополнения рассматриваемой модели, вообще говоря, допустимым уже может и не быть.

Отсюда следует, что вопрос первого рода корректен лишь для полных математических моделей, а вопрос второго рода корректен как для полных, так и для неполных моделей.

Аналогичная ситуация имеет место и для оптимизационных задач. Поясним это несложным примером.

Допустим, что требуется распределить поровну между десятью сотрудниками некоторой фирмы сумму в 10 000 рублей так, чтобы каждый получил как можно больше.

Решение, при котором каждому сотруднику выплачивается по 1500 рублей, является недопустимым, а в то время, как решение: выдать каждому по 1000 рублей – оптимальным. Если же теперь в модель добавить условие, заключающееся в необходимости выплаты 15-ти процентного налога, то решение о выплате каждому из сотрудников по 1000 рублей уже не будет оптимальным – оно станет недопустимым. Первое же решение (о выплате по 1500 рублей) остается недопустимым. Оно является таковым независимо от факта, было ли учтено в модели условие выплаты налога или нет.

Таким образом, можно предложить итерационную процедуру решения задач при помощи неполных моделей. Каждая итерация которой состоит из двух этапов.

- на первом – в автоматическом режиме все состояния неполной математической модели разделяются на два множества: множество недопустимых состояний и множество всех остальных, последнее из которых будем называть *множеством условно допустимых состояний*, ибо, строго говоря, они лишь "подозреваются на допустимость";
- затем пользователь анализирует это "подозрительное" множество (привлекая в случае необходимости не формализуемые или даже интуитивные соображения), сужает его, пополняя модель новыми обязательными условиями.

Каждая итерация (процедурная пара: "работа ЭВМ" – "анализ пользователя") может выполняться неоднократно до тех пор, пока пользователь не обнаружит состояние, которое он сочтет "приемлемым решением" или же установит факт отсутствия такового.

Преимуществом этой схемы решения является то, что пользователь (а не ЭВМ!) выбирает состояние модели, принимаемое за решение. ЭВМ лишь контролирует его выбор, не позволяя пользователю осуществлять данный выбор из множества недопустимых состояний.

Таким образом, если в случае полной модели пользователь получает автоматически рассчитанное компьютером окончательное решение в виде оптимального вектора, варианта прогноза или имитирующей траектории, то для неполных моделей функция ЭВМ заключается лишь в отделении множества состояний модели, идентифицированных как недопустимые.

Роль пользователя неполной модели заключается в последовательном уточнении результата (возможно, до полной однозначности), исходя из собственных, не обязательно формализуемых или, быть может, даже интуитивных соображений.

Нужно заметить, что в традиционной практике математического моделирования, основанной на применении полных моделей, достаточно часто автоматически найденное решение вызывает у пользователя (явно или неявно) негативное отношение, порождаемое именно претензией модели на учет всех существенных факторов и, как следствие, претензией решения на оптимальность.

Например, при исследовании объектов социально-экономической природы логично не полагаться только на формальные методы и пренебрегать опытом и интуицией пользователя, но и предпочтительно поощрять использование последних.

Схема неполного моделирования в этом смысле выглядит более привлекательной, ибо ЭВМ (при помощи математических методов) всего лишь сужает множество состояний модели, на котором пользователь должен сделать выбор решения.

Иными словами, программно-аппаратный комплекс не имеет своей функцией поиск окончательного решения вместо пользователя, а только предохраняет последнего от возможных количественных ошибок в процессе учета существенных факторов, поддающихся формализации.

## **Процедура сужения множества условно допустимых состояний**

Сужение множества условно допустимых состояний для неполной математической модели состоит в пополнении набора формализуемых ограничений дополнительными условиями. Процедуру включения в математическую модель некоторого числа дополнительных условий (связей, ограничений и т.п.) будем называть *пополнением* этой модели.

Пополнение, очевидно, возможно как для полных, так и для неполных моделей. Однако, отличие состоит в том, что включение в полную математическую модель некоторого добавочного условия (ограничения, связи и т.п.) может превратить решение, идентифицированное как допустимое (или оптимальное) в недопустимое, в то время как решение, определенное в неполной модели как недопустимое, останется таковым в случае включения в нее любого дополнительного условия или ограничения.

Следует отличать пополнение математической модели от ее *модификации*. Последняя допускает изменение формулировок отдельных условий, уже входящих в описание исходной модели. Пополнение же состоит во включении в состав модели некоторого дополнительного условия без какого-либо изменения других ее элементов.

Модификация математической модели часто оказывается необходимой как на этапе разработки, так и в процессе ее эксплуатации, однако результат модификации всегда должен рассматриваться как некоторая новая неполная модель. В равной степени это относится и к удалению какого-либо условия из модели.

## **Общая схема решения задач для неполных математических моделей**

Таким образом, методологическая основа неполного моделирования заключается в сочетании автоматического анализа неполных моделей и вовлечения пользователя непосредственно в процесс поиска решения.

Процесс поиска решения разбивается на итерации, на каждой из которых ЭВМ выполняет построение множества условно допустимых решений. После чего пользователь осуществляет пополнение или модификацию модели.

Пополнение или модификация выполняются пользователем на основе неформализуемых критериев или оценок до тех пор, пока не будет получено состояние, идентифицируемое им как приемлемое, или же установлен факт отсутствия такого решения.

Отметим, что при этом центральной проблемой оказывается задача выделения множества условно допустимых состояний модели.

Однако, на практике для успешного использования схемы неполного моделирования необходимо преодолеть два технических затруднения, возникающих в процессе анализа множества состояний модели, которые не были отнесены к недопустимым (то есть множества условно допустимых состояний):

- во-первых, следует решить проблему представления этого множества в ЭВМ в виде, удобном для анализа,
- во-вторых, необходимо предусмотреть возможность возникновения ситуации, когда анализируемое множество оказывается пустым.

Известно, что в компьютере достаточно легко представляются лишь отдельные состояния математической модели, например, последовательным перечислением значений всех ее показателей.

В случае полной модели такое ограничение не имеет принципиального характера, поскольку автоматически рассчитываемое оптимальное решение или имитационный прогноз обычно являются именно конкретным состоянием модели.

Однако в схемах неполного моделирования возможность анализа множества условно допустимых состояний в целом является принципиально необходимой. Поэтому пользователь должен иметь в своем распоряжении инструмент, позволяющий выполнять такой.

Отмеченное затруднение можно преодолеть, используя *метрику*, – то есть способ количественной оценки близости множеств условно допустимых и целевых состояний неполной модели.

Как и множество допустимых состояний, множество желательных состояний задается пользователем в математической модели набором условий, связей или ограничений, налагаемых на значения ее показателей и отражающих цели, приоритеты или же отношения предпочтения пользователя. В силу чего ЭВМ может не только отделять множество недопустимых состояний, но и находить среди остальных (условно допустимых состояний) решение, наименее удаленное (в смысле выбранной метрики) от множества желательных состояний.

Метрика позволяет пользователю на каждом шаге работы с математической моделью ограничиваться анализом лишь отдельной точки множества допустимых состояний, не рассматривая это множество целиком.

Остающаяся свобода выбора во множестве условно допустимых состояний может быть использована для пополнения или коррекции наборов обязательных и/или целевых условий модели.

При этом предполагается, что пользователь может сформулировать для текущего значения каждого показателя (использовав неформализуемые или, быть может, интуитивные критерии) одну из следующих оценок:

- значение показателя приемлемо;
- значение показателя желательно изменить;
- значение показателя необходимо изменить.

Если значения всех показателей признаны пользователем приемлемыми, то решение получено. В противном случае необходимо продолжить пополнение неполной математической модели или ее корректировку.

Необходимость пополнения модели обуславливается не наличием каких-либо ошибок в условии (хотя такую возможность исключать не следует), а принципиальной неполнотой анализируемой модели, которая выявляется, как правило, лишь в процессе решения задачи.

Наиболее простой и эффективный способ пополнения математической модели состоит в изменении множества допустимых состояний, заключающемся во введении новых условий, связей или ограничений, то есть просто в сужении этого множества.

Если в результате включения дополнительных условий множество допустимых состояний оказалось непустым, то пополнение считается завершенным успешно.

Важным при этом оказывается следующее обстоятельство.

Добавление новых условий или связей нередко превращает систему обязательных условий в противоречивую, то есть в систему, для которой не существует ни одного допустимого состояния.

В этом случае пользователю следует вернуться к предыдущему шагу процесса поиска решения и выполнить пополнение не во множестве *допустимых*, а для *желательных* состояний.

Найденное значение метрики даст оценку возникшей в процессе пополнения несовместности обязательных условий модели. Оно также позволит определить величину максимально возможного изменения параметров пополнения, при котором множество условно допустимых состояний остается непустым.

Последовательно выполняемое пополнение математической модели приводит или к выявлению ее приемлемого состояния, или же устанавливает факт его отсутствия.

## **ЛИНЕЙНЫЕ НЕПОЛНЫЕ МОДЕЛИ**

### **Структура линейной неполной математической модели, используемая в электронных таблицах "БАЛАНС" и "MultiLC"**

Основой описания неполной математической модели является упорядоченный  $n$ -компонентный список показателей, – то есть величин, значения которых характеризуют состояние модели. (Термин показатель может быть заменен словами переменная или неизвестная).

Описание математической модели включает также дополнительные числовые характеристики этих показателей – *атрибуты*,

- некоторые из них задаются в качестве *исходных данных*,
- остальные рассчитываются автоматически как *решение*.

К атрибутам - *исходным данным*, которые задаются пользователем, относятся:

- границы *обязательного* (допустимого) диапазона значений показателей;
- границы *желательного* (целевого) диапазона значений показателей;
- коэффициенты в *линейных связях* между показателями.

К автоматически рассчитываемым атрибутам относятся:

- значения показателей;
- величины нарушения обязательных границ;
- величины нарушения желательных границ.

Для описания используются следующие обозначения.

Пусть общее число показателей равно  $n$ , а значение показателя с номером  $k$  обозначается  $\xi_k$ , где  $k = [1, n]$ , то есть  $k$  принимает значения от 1 до  $n$ .

## **Обязательные ограничения и связи**

### **Границы допустимого диапазона значений показателя**

Основными атрибутами показателя являются границы диапазона его *допустимых (обязательных)* значений. Конкретно диапазон допустимых значений определяется заданием *нижней* и *верхней границ* этого диапазона.

В режиме автоматического расчета значений показателей выполняется поиск такого состояния модели, для которого *ни одна* из границ обязательного диапазона не оказывается нарушенной.

Если же таких состояний не обнаруживается, то автоматическая обработка модели завершается.

Формально множество допустимых значений показателей модели определяется системой двусторонних ограничений следующего вида.

Обозначим через  $d_k$  и  $D_k$  соответственно *величины нижних и верхних границ допустимого диапазона значений*  $k$ -го показателя  $\xi_k$ . Тогда множество допустимых состояний модели будет задаваться системой неравенств:  $d_k \leq \xi_k \leq D_k$ , где  $k = [1, n]$ .

Значения границ допустимых (обязательных) диапазонов величин показателей могут быть любыми вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам:  $d_k \leq D_k$ ,  $k = [1, n]$ .

Случай  $d_k = D_k = \alpha$  возможен. В этом случае  $\xi_k$  обязано иметь значение  $\alpha$ .

Часть границ допустимых (обязательных) диапазонов может быть установленной "по умолчанию".

Если значение некоторого показателя не ограничено сверху, то предполагается равенство этой границы "плюс бесконечности", моделируемой достаточно большим положительным числом. Аналогично, в случае отсутствия нижней границы предполагается ее равенство "минус бесконечности", представляемой достаточно большим по абсолютной величине отрицательным числом.

По умолчанию для всех показателей модели нижние границы допустимого диапазона *устанавливаются равными нулю*, а верхние *предполагаются отсутствующими*. Таким образом, пользователю необходимо указывать в модели допустимые границы лишь в тех случаях, когда эти границы отличаются от предполагаемых по умолчанию.

### **Задание связей между показателями**

Показатели в неполной математической модели могут быть связаны друг с другом *линейными* зависимостями. Условие линейности означает, что зависимости между величинами показателей являются линейными однородными функциями, то есть, один показатель представим в виде суммы других показателей, умноженных на некоторые постоянные коэффициенты.

По соображениям повышения практической эффективности каждый показатель модели может явно зависеть *только лишь от стоящих ранее него в списке показателей*, то есть, от показателей, номера которых меньше, чем номер данного показателя.

Это означает, что линейные функции, задающие связи между показателями, имеют следующий вид:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki} \xi_i, \text{ где } k = [2, n],$$

где величины  $A_{ki}$  являются фиксированными *коэффициентами линейных связей между показателями* рассматриваемой модели.

Значения коэффициентов  $A_{ki}$  в уравнениях связи полагаются *по умолчанию равными нулю*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих как обязательным ограничениям, так и связям является *множеством условно допустимых состояний* линейной неполной модели. Для краткости далее это множество будем называть просто *допустимым*.

## Целевые ограничения

При помощи целевых диапазонов в математической модели формализуются предпочтения и приоритеты пользователя. При этом формализуемые цели и предпочтения *могут конфликтовать (быть в противоречии)* как друг с другом, так и с обязательными условиями и связями.

Обозначим через  $r_k$  и  $R_k$  соответственно *величины нижних и верхних границ целевого диапазона значений*  $k$ -го показателя  $\xi_k$ . Тогда множество целевых состояний модели будет задаваться системой неравенств:  $r_k \leq \xi_k \leq R_k$ , где  $k = [1, n]$ .

Для значений границ целевых диапазонов показателей также предполагается обязательным выполнение условий:  $r_k \leq R_k$ , где  $k = [1, n]$ .

По умолчанию для всех показателей модели как нижние, так и верхние границы целевого диапазона *предполагаются отсутствующими*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих целевым ограничениям будем называть *множеством желательных (целевых) состояний*.

### **Количественная оценка близости множеств условно допустимых и целевых состояний**

Процедура решения задач для конкретной неполной математической модели состоит из нескольких шагов, на каждом из которых пользователь получает некоторый результат автоматического расчета, анализирует его и выполняет необходимое пополнение или коррекцию этой модели.

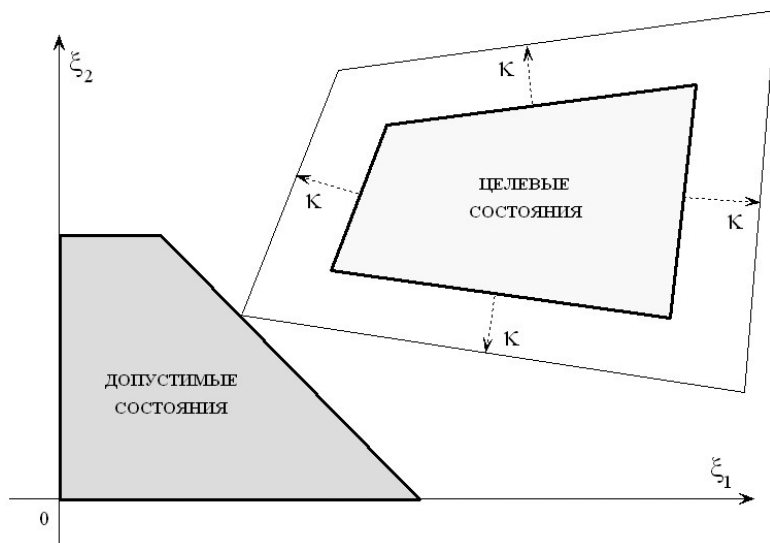


Рис. 1. Способ количественной оценки близости множеств допустимых и желательных состояний модели.

В режиме автоматического расчета значений показателей находится *допустимое* состояние неполной модели, *наименее удаленное* (в определенном ниже смысле) от множества целевых состояний.

Оценка степени близости множеств допустимых и целевых состояний называется *метрикой*.

Ее величина  $K$  есть оптимальное значение целевой функции следующей оптимизационной задачи:

*минимизировать  $K$  (по совокупности  $K$  и всех  $\xi_i$ , где  $i = [1, n]$ ),  
 при условиях:*

$$\begin{aligned} k &\geq 0, & d_k &\leq \xi_k \leq D_k, & , \\ r_k - k &\leq \xi_k \leq R_k + k, & & & k = [1, n], \\ \xi_k &= \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki} \xi_i, & & & k = [2, n]. \end{aligned}$$

Геометрический смысл метрики этого вида иллюстрирует рис.1. Он состоит в том, что выбирается допустимое состояние, оказывающееся одновременно и желательным при минимальном расширении целевого множества.

Метрика определяется лишь для совместных состояний математической модели.

Метрику подобного вида принято называть *чебышевской* метрикой. Она выбрана потому, что ее содержательная интерпретация часто оказывается проще по сравнению с другими способами измерения расстояния между множествами.

## Группировка целевых границ

Чебышевская метрика обладает особенностью, осложняющей ее применение на практике:

для оптимального значения  $K$ , значения некоторых показателей могут иметь *не единственное* значение.

В этом случае для облечения процесса анализа множества состояний неполной математической модели применяется специальная процедура устранения неоднозначности значений показателей.

Эта процедура, называемая *группировкой целевых границ*, заключается в последовательном решении *серии* задач поиска минимальной величины метрики.

Для каждой задачи в серии из условия исключаются ограничения, содержащие переменную  $K$  в тех неравенствах, которые выполняются как равенства.

Это исключение делается заменой в таких ограничениях переменной  $K$  на константу. Значение константы равно значению  $K$ , найденному на предыдущем шаге серии.

Поясним это следующим примером.

Для иллюстрации процедуры группировки целевых границ рассмотрим математическую модель с двумя показателями  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , диапазоны

допустимых значений которых описывается условиями:  $\begin{cases} 0 \leq \xi_1 \leq 3, \\ 0 \leq \xi_2 \leq 5, \end{cases}$  а

множество целевых состояний – условиями:  $\begin{cases} 5 \leq \xi_1 \leq 11, \\ 6 \leq \xi_2 \leq 8, \end{cases}$  тогда задача

нахождения значения метрики принимает вид:

*минимизировать К при условиях:*

$$k \geq 0,$$

$$0 \leq \xi_1 \leq 3,$$

$$0 \leq \xi_2 \leq 5,$$

$$5 - k \leq \xi_1 \leq 11 + k,$$

$$6 - k \leq \xi_2 \leq 8 + k.$$

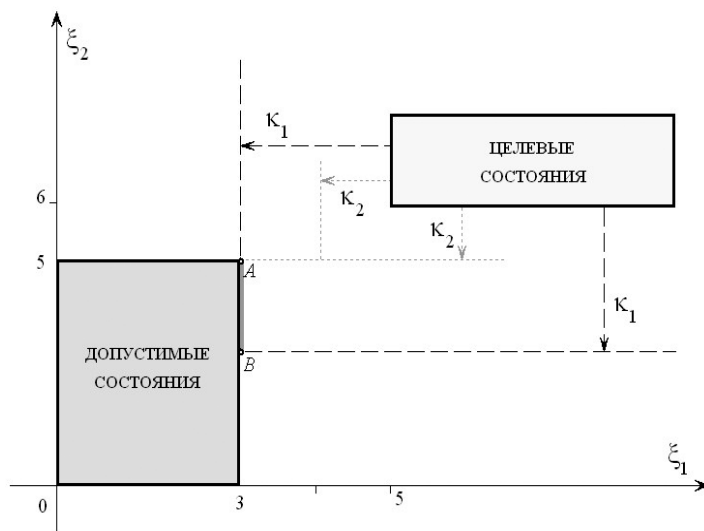


Рис. 2. Процедура группировки целевых ограничений.

Эта задача легко решается графически. Из рис. 2 мы находим очевидный ответ:  $\kappa = 2$ ,  $\xi_1 = 3$ ,  $\xi_2 = [4, 5]$ . Заметим, что переменная  $\xi_2$  определяется в этом случае *неоднозначно*. Решение – отрезок  $AB$ .

На следующем шаге процедуры группировки целевых границ заменим переменную  $\kappa$  константой со значением 2 в ограничении  $5 - \kappa \leq \xi_1$ . Остальные условия задачи не меняем.

Выполнив данную замену, получаем, что на втором шаге процедуры необходимо решать задачу вида:

*минимизировать  $\kappa$  при условиях:*

$$\kappa \geq 0,$$

$$0 \leq \xi_1 \leq 3,$$

$$0 \leq \xi_2 \leq 5,$$

$$3 \leq \xi_1 \leq 11 + \kappa,$$

$$6 - \kappa \leq \xi_2 \leq 8 + \kappa.$$

Решение этой задачи также находится графически, оно имеет вид:  
 $\kappa = 1$ ,  $\xi_1 = 3$ ,  $\xi_2 = 5$ . (См. рис. 2).

Полученное решение определено однозначно, и поэтому процесс группировки закончен.

В этом примере разбиение системы ограничений, описывающих множество целевых состояний на группы по их "удаленности" от множества допустимых состояний имеет следующий вид,

| Группа | Расстояние до цели | Целевые ограничения,<br>относящиеся к этой в группе   |
|--------|--------------------|-------------------------------------------------------|
| 1      | 2.                 | $5 - \kappa \leq \xi_1$                               |
| 2      | 1.                 | $6 - \kappa \leq \xi_2$                               |
| 0      | 0.                 | $\xi_1 \leq 11 + \kappa, \quad \xi_2 \leq 8 + \kappa$ |

Процедура группировки целевых границ завершается, если:

- либо все ограничения, содержащие  $K$ , оказались зафиксированными;
- либо на некотором шаге процедуры последовательной фиксации значение  $K$  оказалось равным нулю.

В итоге процедура выполняет разбиение множества целевых ограничений на *группы* (отсюда – ее название), каждая из которых обладает своей собственной количественной оценкой "близости" целей и возможностей. Для наглядности эти величины именуются "расстоянием".

Строго говоря, метрикой, определяющей расстояние между множествами допустимых и целевых состояний, является не значение переменной  $K$ , а набор (можно сказать, *вектор*) монотонно убывающих чисел  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_T$ , где  $T$  есть число групп фиксации, каждой из которых соответствует свое расстояние до цели.