

Построение функций обратных связей

Формально функции обратных связей вводятся аксиоматически. На практике, однако, к их определению можно прийти, исследуя процедуру решения задачи математического программирования методом штрафных функций.

Пусть вектор $x \in E^n$ имеет координатный столбец $\|X\| = \|x_1, x_2, \dots, x_n\|^T$. Рассмотрим Задачу математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } X \quad \text{целевую функцию } F(X) \\ & \text{при условиях:} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$X \in \Omega, \quad \text{где } \Omega \equiv \left\{ X \mid f_i(X) \leq 0 \quad i = \overline{1, m} \right\}.$$

Предположим также, что задача (1.1.1) имеет конечное локальное решение $F^* \stackrel{\text{def}}{=} F(X^*)$ с X^* состоящим, быть может, более, чем из одной точки. Также пусть каждая из функций $F(X)$, $f_i(X)$ $i = \overline{1, m}$ дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Наконец мы будем использовать

Определение
1.1.1

Ограничение $f_i(X) \leq 0$ называется *активным* в точке $X_0 \in E^n$, если $f_i(X_0) \geq 0$ и, соответственно, называется *неактивным*, если $f_i(X_0) < 0$.

Пусть для задачи (1.1.1) существует регулярная функция Лагранжа вида

$$L(X, \Lambda) = F(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X),$$

где $\Lambda \in E^m$ есть вектор, имеющий координатный столбец

$$\|\Lambda\| = \|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\|^T,$$

а X^* есть решение задачи (1.1.1). Числа λ_i $i = \overline{1, m}$ принято называть *множителями Лагранжа* задачи (1.1.1).

Необходимое условие разрешимости задачи (1.1.1) дает

Теорема 1.1.1 Пусть X^* есть решение задачи (1.1.1), тогда существует вектор Λ^* такой, что

(Каруша-Куна-Таккера)

$$\operatorname{grad}_x L(X^*, \Lambda^*) = 0,$$

и для каждого $i = \overline{1, m}$ выполнены условия

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad \text{и} \quad \lambda_i^* f_i(X^*) = 0.$$

Последнее утверждение в теореме 1.1.1 принято называть условиями *дополняющей нежесткости*. Доказательство этой теоремы можно найти в разных источниках, например, в [4].

Обратим также внимание на следующее.

1. Функция и множители Лагранжа определены лишь для задачи (1.1.1), имеющей конечное решение F^* .
2. Если ограничение $f_i(X) \leq 0$ неактивно в X^* , то $\lambda_i^* = 0$. Обратное не верно. Иначе говоря, теорема 1.1.1 допускает случай, когда равенства $f_i(X^*) = 0$ и $\lambda_i^* = 0$ выполнены одновременно для некоторого $i = \overline{1, m}$.

Метод гладких штрафных функций

Применим для решения задачи (1.1.1) специальный вариант метода *гладких* штрафных функций [3, 29]. Этот вариант заключается в последовательной максимизации по $X \in E^n$ вспомогательной функции

$$A(\tau, X) = F(X) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(X)) \quad (1.1.2)$$

при стремящихся к нулю положительных значений инструментального параметра τ .

Предполагается, что в (1.1.2) функция $P(\tau, s)$, «штрафующая» нарушение ограничения $s \leq 0$, удовлетворяет условиям:

1°. Она определена $\forall \tau > 0$ и $\forall s$, а также имеет непрерывные частные производные по s до второго порядка включительно.

2°. Для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполняются неравенства

$$P(\tau, s) > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) > 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}(\tau, s) > 0. \quad (1.1.3)$$

3°.

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \leq 0. \end{cases}$$

4°. Пусть, *кроме того*, функция $P(\tau, s)$ имеет вид

$$P(\tau, s) = \tau \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right), \quad (1.1.4)$$

где Φ есть функция одной переменной. То есть Φ зависит только от отношения $\frac{s}{\tau}$.

Примером такой функции может служить $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right)$. Однако, ни барьерная логарифмическая, ни стандартная квадратичная штрафная функция¹ совокупности условий 1°—4° не удовлетворяют.

Заметим также, что в силу 2° на множествах $s \in [\delta_0, +\infty) \forall \delta_0 > 0$ и $s \in (-\infty, 0]$ сходимость в 3° *равномерная*.

Согласно сделанным предположениям функция $A(\tau, X)$ определена $\forall \tau > 0$ и $\forall X \in E^n$. Кроме того, эта функция дважды непрерывно дифференцируема по компонентам X .

Пусть² $\tilde{X}_\tau$ есть стационарная точка функции (1.1.2), определяемая уравнением

$$\operatorname{grad}_x A(\tau, \tilde{X}_\tau) = 0. \quad (1.1.5)$$

Тогда суть метода штрафных функций может быть сформулирована как равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} A(\tau, \tilde{X}_\tau) = F(X^*).$$

Причем, если решение задачи (1.1.1) локально единственно, то отображение $\tau \rightarrow \tilde{X}_\tau$ однозначно и справедливы соотношения

$$x_j^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tilde{x}_{\tau j} \quad j = \overline{1, n}.$$

¹То есть функция вида $P(\tau, s) = \frac{(|s| + s)^2}{8\tau} = \begin{cases} \frac{s^2}{2\tau} & \text{при } s \geq 0, \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases}$

²Обозначение вида A_b , где A и b вещественные переменные, будем использовать в случаях, когда A зависит от b , но эта зависимость не обязательно является функцией. Для функциональных зависимостей сохраним стандартное обозначение $A(b)$.

Функции обратных связей для линейных задач

Метод функций обратных связей более просто описывается в случае линейных функций $F(X)$ и $f_i(X)$ $i = \overline{1, m}$. Поэтому вначале рассмотрим пару взаимно двойственных задач линейного программирования, записанных в *симметричной* форме.

Пусть векторы $X \in E^n$ и $\Lambda \in E^m$ являются соответственно искомыми переменными для следующих задач.

1. Прямая задача линейного программирования:

$$\text{максимизировать по } X \text{ функцию} \quad F(X) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j$$

$$\text{при условиях} \quad x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2.1)$$

$$f_i(X) = -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq 0 \quad i = \overline{1, m}.$$

2. Двойственная задача линейного программирования:

$$\text{минимизировать по } \Lambda \text{ функцию} \quad G(\Lambda) = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i$$

$$\text{при условиях} \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.2.2)$$

$$g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \quad j = \overline{1, n}.$$

Решение двойственной задачи будем обозначать как Λ^* и $G^* = G(\Lambda^*)$.

Используем для решения задач (1.2.1) — (1.2.2) метод гладких штрафных функций со вспомогательными функциями

$$\begin{aligned} A_P(\tau, X) &= F(X) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(X)) - \sum_{j=1}^n P(\tau, (-x_j)), \\ A_D(\tau, \Lambda) &= G(\Lambda) + \sum_{j=1}^n P(\tau, -g_j(\Lambda)) + \sum_{i=1}^m P(\tau, (-\lambda_i)). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Стационарные точки функций (1.2.3) очевидно будут зависеть от значений параметра τ . Поэтому будем их обозначать как $\tilde{X}_\tau$ и $\check{\Lambda}_\tau$. Тогда в силу свойств функции $P(\tau, s)$

$$\left. \text{grad}_x A_P(\tau, X) \right|_{X=\tilde{X}_\tau} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \text{grad}_\lambda A_D(\tau, \Lambda) \right|_{\Lambda=\check{\Lambda}_\tau} = 0.$$

При этом будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_i^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{X}_\tau)) \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\check{\Lambda}_\tau)) \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Иначе говоря, компоненты вектора Λ^* являются множителями Лагранжа для задачи (1.2.1), а компоненты вектора X^* суть множители Лагранжа в задаче (1.2.2).

Совместно использовать соотношения (1.2.4) для поиска оценок F^* и G^* нельзя. Действительно, при каждом фиксированном $\tau > 0$ мы имеем

$$\frac{\partial P}{\partial f_i}(\tau, f_i(\tilde{X}_\tau)) \neq \check{\lambda}_{i\tau} \quad i = \overline{1, m}$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial g_j}(\tau, -g_j(\check{\Lambda}_\tau)) \neq \tilde{x}_{j\tau} \quad j = \overline{1, n}.$$

Эти соотношения оказываются верными равенствами лишь *в пределе* при $\tau \rightarrow +0$.

Однако при фиксированном $\tau > 0$ равенства (1.2.4) можно *формально объединить* в одну систему уравнений с *новыми* неизвестными $\bar{X}_\tau$ и $\bar{\Lambda}_\tau$

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_{\tau i} = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\bar{X}_\tau)) & i = \overline{1, m}, \\ \bar{x}_{\tau j} = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, -g_j(\bar{\Lambda}_\tau)) & j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1.2.6)$$

При этом естественно предположить, что решения системы (1.2.6), также будут являться некоторой аппроксимацией решений задач (1.2.1) и (1.2.2).

Теперь заметим, что в силу условий (1.1.3) функция $\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)$ по переменной s имеет обратную функцию $Q(\tau, s) = \text{inv}\left(\frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s)\right)$. Поэтому система (1.2.6) может быть записана в виде

$$\begin{cases} f_i(\tau, \bar{X}_\tau) = Q(\tau, \bar{\lambda}_{i\tau}) & i = \overline{1, m}, \\ -g_j(\tau, \bar{\Lambda}_\tau) = Q(\tau, \bar{x}_{j\tau}) & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{x}_j = Q(\tau, \bar{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \bar{\lambda}_i = -Q(\tau, \bar{x}_j) & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Можно показать, что система (1.2.7) имеет положительные решения для любых без исключения задач линейного программирования.

Отметим, что функция $Q(\tau, s)$ монотонно возрастает по s и непрерывно дифференцируема при любых положительных τ и s . Заметим также, что *положительность* компонент векторов $\bar{X}_\tau$ и $\bar{\Lambda}_\tau$ следует из системы (1.2.6) и неравенств (1.1.3).

Кроме того, $Q(\tau, s)$ может рассматриваться как функция, реализующая *обратную связь* в системе ограничений задач (1.2.1) и (1.2.2).

Действительно, по значениям функции $Q(\tau, s)$ можно определить, какие из ограничений в этих задачах являются активными в точке решения, а какие — нет. Конкретно, малые по модулю значения $Q(\tau, s)$ указывают на активность ограничения, а большие — на ее отсутствие.

Этим оправдывается уместность термина «обратная связь» как при ссылках на функции вида $Q(\tau, s)$, так и на методы, использующие эти функции.

Возможную справедливость сформулированных предположений иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1.2.1.

прямая задача

максимизировать в E^2 функцию $F(X) = 2x_1 + 3x_2$,

при условиях

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \text{и}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad 2x_1 + x_2 \leq 6;$$

двойственная задача

минимизировать в E^2 функцию $G(\Lambda) = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$,

при условиях $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2, \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3.$$

Решениями этой пары взаимодвойственных задач будут соответственно $x_1^* = 2, x_2^* = 2, F^* = 10$ и $\lambda_1^* = \frac{4}{3}, \lambda_2^* = \frac{1}{3}, G^* = 10$. Графически эти решения показаны точками A^* и B^* на рис. 1.2.1.

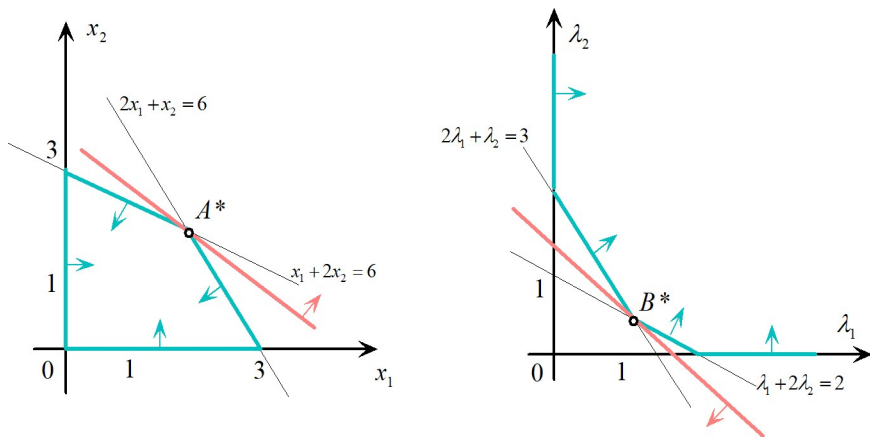


Рис. 1.2.1. Графическая интерпретация прямой и двойственной задач в примере 1.2.1

Для использования метода функций обратных связей необходимо выбрать конкретную функцию $Q(\tau, s)$.

Например, пусть функция $P(\tau, s)$, «штрафующая» нарушение условия $s \leq 0$ такова, что

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \sqrt{\frac{s^2}{4\tau^2} + 1} + \frac{s}{2\tau}.$$

В этом случае равенство $s = \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, Q)$ будет определять функцию $Q(\tau, s)$ обратную к функции $\frac{\partial P}{\partial s}$, то есть

$$s = \sqrt{\frac{Q^2}{4\tau^2} + 1} + \frac{Q}{2\tau}.$$

Откуда следует, что $Q(\tau, s) = \tau \left(s - \frac{1}{s} \right)$, и система (1.2.7) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -6 + \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 & = & \tau \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -6 + 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 & = & \tau \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -2 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & -\tau \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & -\tau \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right), \end{array} \right. \quad (1.2.8)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 1.2.1a и табл. 1.2.1b.

Таблица 1.2.1а.
Решения системы (1.2.8) для примера 1.2.1

τ	$\overline{x}_{1\tau}$	$\overline{x}_{2\tau}$	$F(\overline{X}_\tau)$	$\overline{\lambda}_{1\tau}$	$\overline{\lambda}_{2\tau}$	$G(\overline{\Lambda}_\tau)$
10^{-1}	1.787429330	2.129893665	9.964539653	1.263573111	0.306815112	9.422329338
10^{-2}	1.979982065	2.012885024	9.998619202	1.328142519	0.328554106	9.940179747
10^{-3}	1.998024716	2.001278917	9.999886182	1.332831445	0.332835513	9.994001742
10^{-4}	1.999802747	2.000127789	9.999988862	1.333283314	0.333283355	9.999400017
10^{-5}	1.999980277	2.000012778	9.999998889	1.333328333	0.333328334	9.999940000
10^{-6}	1.999998028	2.000001278	9.999999889	1.333332833	0.333332833	9.999994000
10^{-7}	1.999999803	2.000000128	9.999999989	1.333333283	0.333333283	9.999999400
10^{-8}	1.999999980	2.000000013	9.999999999	1.333333328	0.333333328	9.999999940

Таблица 1.2.1б.
Решения системы (1.2.8) для примера 1.2.1

τ	$f_1(\overline{X}), Q(\tau, \overline{\lambda}_1)$	$f_2(\overline{X}), Q(\tau, \overline{\lambda}_2)$	$g_1(\overline{\Lambda}), -Q(\tau, \overline{x}_1)$	$g_2(\overline{\Lambda}), -Q(\tau, \overline{x}_2)$
10^{-1}	0.047216659	-0.295247676	-0.122796665	-0.166038666
10^{-2}	0.005752113	-0.027150846	-0.014749270	-0.015160857
10^{-3}	0.000582549	-0.002671652	-0.001497530	-0.001501598
10^{-4}	0.000058326	-0.000266717	-0.000149975	-0.000150016
10^{-5}	0.000005833	-0.000026667	-0.000015000	-0.000015000
10^{-6}	0.000000583	-0.000002667	-0.000001500	-0.000001500
10^{-5}	0.000000058	-0.000000267	-0.000000150	-0.000000150
10^{-6}	0.000000006	-0.000000027	-0.000000015	-0.000000015

Рассмотрим также другой вариант примера 1.2.1, взяв в ней целевую функцию с коэффициентом 1 при x_1 .

Пример 1.2.2. Для пары задач:

прямая задача

максимизировать в E^2 функцию $F(X) = x_1 + 3x_2$,
при условиях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и
 $x_1 + 2x_2 \leq 6$, $2x_1 + x_2 \leq 6$;

двойственная задача

минимизировать в E^2 функцию $G(\Lambda) = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$,
при условиях $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и
 $\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 1$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$.

Решениями этой пары взаимодвойственных задач будут

$$x_1^* = 0, x_2^* = 3, F^* = 9 \quad \text{и} \quad \lambda_1^* = \frac{3}{2}, \lambda_2^* = 0, G^* = 9.$$

Графически решения изображены на рис. 1.2.2 точками A^* и B^* .

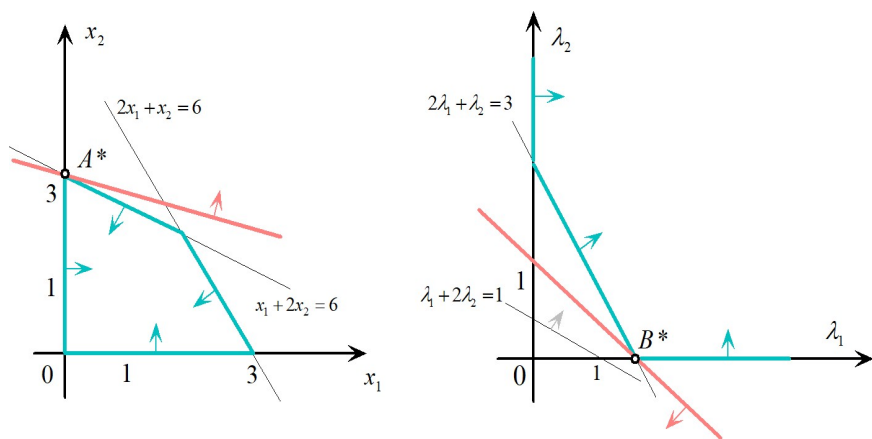


Рис. 1.2.2. Графическое представление задачи 1.2.2

Система (1.2.7) в этом случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -6 + \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 & = & \tau \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ -6 + 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 & = & \tau \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -1 + \bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 & = & -\tau \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -3 + 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 & = & -\tau \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right), \end{array} \right. \quad (1.2.9)$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 1.2.2а и табл. 1.2.2б.

Таблица 1.2.2а.
Решения системы (1.2.9) для примера 1.2.2

τ	$\overline{x}_{1\tau}$	$\overline{x}_{2\tau}$	$F(\overline{X}_\tau)$	$\overline{\lambda}_{1\tau}$	$\overline{\lambda}_{2\tau}$	$G(\overline{\Lambda}_\tau)$
10^{-1}	0.222133379	2.919567131	8.980834772	1.352207746	0.037879447	8.340523161
10^{-2}	0.020326771	2.993894717	9.002010921	1.485014527	0.003372129	8.930319938
10^{-3}	0.002003327	2.999413919	9.000245086	1.498500135	0.000333714	8.993003095
10^{-4}	0.000200033	2.999941639	9.000024951	1.499850001	0.000033337	8.999300031
10^{-5}	0.000020000	2.999994166	9.000002500	1.499985000	0.000003333	8.999930000
10^{-6}	0.000002000	2.999999417	9.000000250	1.499998500	0.000000333	8.999993000
10^{-7}	0.000000200	2.999999942	9.000000025	1.499999850	0.000000033	8.999999300
10^{-8}	0.000000020	2.999999994	9.000000002	1.499999985	0.000000003	8.999999930

Таблица 1.2.2б.
Решения системы (1.2.9) для примера 1.2.2

τ	$f_1(\overline{X}), Q(\tau, \overline{\lambda}_1)$	$f_2(\overline{X}), Q(\tau, \overline{\lambda}_2)$	$g_1(\overline{\Lambda}), -Q(\tau, \overline{x}_1)$	$g_2(\overline{\Lambda}), -Q(\tau, \overline{x}_2)$
10^{-1}	0.061267641	-2.636166110	0.427966641	-0.257705060
10^{-2}	0.008116204	-2.965451741	0.491758786	-0.026598816
10^{-3}	0.000831166	-2.996579426	0.499167563	-0.002666015
10^{-4}	0.000083312	-2.999658294	0.499916676	-0.000266660
10^{-5}	0.000008333	-2.999965833	0.499991667	-0.000026667
10^{-6}	0.000000833	-2.999996583	0.499999167	-0.000002667
10^{-7}	0.000000083	-2.999999658	0.499999917	-0.000000267
10^{-8}	0.000000008	-2.999999966	0.499999992	-0.000000027

Функции обратных связей в нелинейных задачах

Обобщение метода функций обратных связей на случай нелинейных задач выполним следующим образом.

Заметим вначале, что будут верны равенства

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - Q(\tau, \lambda_i) &= \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} & i = \overline{1, m}, \\ -\sigma_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \lambda_i + Q(\tau, \bar{x}_j) &= \frac{\partial U}{\partial x_j} & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

для функции

$$U(\tau, X, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sigma_j x_j - R(\tau, x_j) \right) + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i) \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_j \lambda_i, \quad (1.3.1)$$

где $R(\tau, s) = \int_{\sigma(\tau)}^s Q(\tau, u) du$, а $\sigma(\tau)$ однозначно находится из условия

$$Q(\tau, \sigma(\tau)) = 0.$$

Действительно, уравнение $Q(\tau, \sigma) = 0$ при каждом фиксированном $\tau > 0$ имеет единственный положительный корень σ , поскольку функция $Q(\tau, s)$ строго монотонно возрастает по s и не ограничена как снизу, так и сверху $\forall s \in (0, +\infty)$.

Иначе говоря, решения системы (1.2.7) $\bar{X}_\tau$ и $\bar{\Lambda}_\tau$ суть *стационарные точки* функции $U(\tau, X, \Lambda)$ по переменным X и Λ . При этом сама функция (1.3.1) и условия ее стационарности могут быть записаны как

$$U(\tau, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i),$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q(\tau, x_j) & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -Q(\tau, \lambda_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = Q(\tau, x_j) & j = \overline{1, n}, \\ f_i(X) = Q(\tau, \lambda_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^n \sigma_j x_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(-\beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) = F(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X)$$

есть регулярная функция Лагранжа задачи (1.2.1).

Вид функции Лагранжа не зависит от того, являются ли функции $F(X)$, $f_i(X)$ $i = \overline{1, m}$ линейными или нет. Поэтому $U(\tau, X, \Lambda)$ можно ввести в рассмотрение *по определению* также и для нелинейной задачи (1.1.1).

Предположим, что условия $x_j \geq 0$ $j = \overline{1, n}$ (если таковые имеются) содержатся в системе неравенств $f_i(X) \leq 0$ $i = \overline{1, m}$. Тогда функция $U(\tau, X, \Lambda)$ и условия ее стационарности для задачи (1.1.1) соответственно будут иметь вид

$$U(\tau, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (1.3.2)$$

и

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\overline{X}, \overline{\Lambda}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\overline{X}, \overline{\Lambda}) = -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\overline{X}, \overline{\Lambda}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ f_i(\overline{X}) = -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) & i = \overline{1, m}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где $L(X, \Lambda) = F(X) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X)$.

Здесь, как и в линейном случае, можно попытаться использовать $F(\overline{X})$ в качестве аппроксимации значения F^* для задачи (1.1.1).

На возможную справедливость этих предположений указывает

Пример 1.3.1: *максимизировать по $X \in E^1$ функцию*

$$F(X) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$$

$$\text{при условии} \quad f(X) = x - 3 \leq 0,$$

Эта задача имеет два локальных решения³

$$x_{(1)}^* = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -1.154700538, \quad F_{(1)}^* = \frac{16}{27}\sqrt{3} \approx 1.026499479$$

$$\text{и} \quad X_{(2)}^* = 3, \quad F_{(2)}^* = 7\frac{2}{3}.$$

Для решения задачи используем функцию обратной связи вида

$$Q(\tau, s) = \tau \left(s - \frac{1}{s} \right) \quad \text{с} \quad R(\tau, s) = \tau \left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right).$$

В этом случае U -функция будет

$$U(\tau, X, \Lambda) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x - \lambda(-3 + x) + \tau \left(\frac{\lambda^2}{2} - \ln \lambda - \frac{1}{2} \right), \quad (1.3.4)$$

а условия ее стационарности, то есть система (1.3.2), соответственно

$$\begin{cases} \bar{x}^2 - \frac{4}{3} - \bar{\lambda} = 0, \\ 3 - \bar{x} = -\tau \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right). \end{cases}$$

³Здесь и далее нижний индекс вида *целое число в круглых скобках* используется для обозначения порядкового номера элемента во множестве, в то время как нижний индекс без скобок есть номер компоненты вектора или матрицы.

Свойства U -функции (1.3.4) иллюстрируют рис. 1.3.1 и рис. 1.3.2.

На рис. 1.3.1 показана система изолиний функции $U(\tau, X, \Lambda)$ для задачи из примера 1.3.1 при фиксированном значении $\tau = 0.001$.

На рис. 1.3.2 дано графическое решение уравнения

$$\frac{\bar{x} - 3}{\tau} = \bar{x}^2 - \frac{4}{3} - \frac{3}{3\bar{x}^2 - 4}, \quad (1.3.5)$$

получающегося при исключении переменной $\bar{\Lambda}$ из условий стационарности для функции (1.3.4). Здесь значение параметра $\tau = 0.05$.

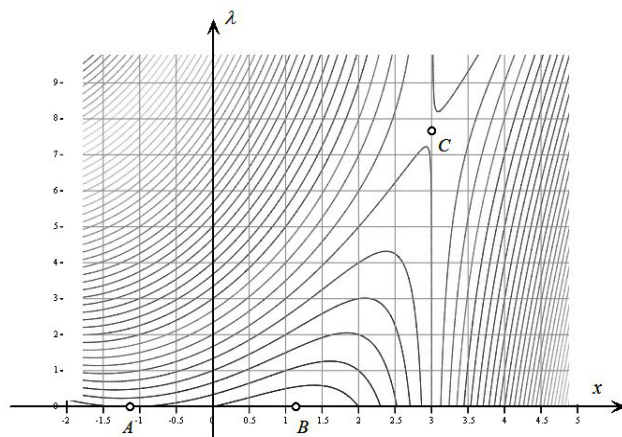


Рис. 1.3.1. Система изолиний для функции $U(0.001, x, \lambda)$

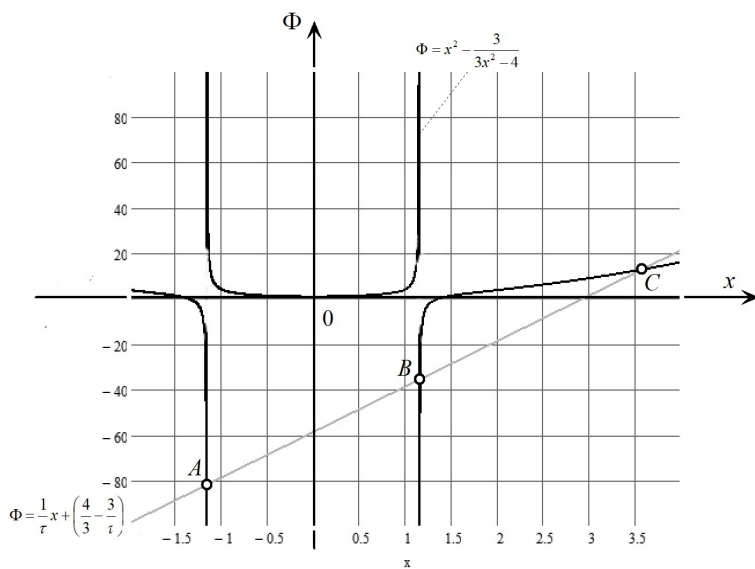


Рис. 1.3.2. Графическое решение уравнения (1.3.5)

Исходя из рис. 1.3.1 и 1.3.2 можно предположить, что вспомогательная функция $U(\tau, x, \lambda)$ при малых положительных значениях τ имеет три изолированные стационарные точки, принадлежащих соответственно окрестностям точек, обозначенных как A, B и C :

$$\left\{ x_{(A)}^* = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \lambda_{(A)}^* = 0 \right\}, \quad \left\{ x_{(B)}^* = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad \lambda_{(B)}^* = 0 \right\}$$

и

$$\left\{ x_{(C)}^* = 3, \quad \lambda_{(C)}^* = 7\frac{2}{3} \right\}.$$

В табл. 1.3.1 — 1.3.3 приведены данные (полученные одним и тем же алгоритмом), с помощью которых можно оценить скорость сходимости к решению при $\tau \rightarrow +0$.

Стоит также отметить, что получаемая аппроксимация является локальной. Кроме того, она зависит не только от начального приближения для x , но и от используемого значения параметра τ .

Таблица 1.3.1

Решение системы 1.3.3 с начальной точкой $x = 2$ и $\lambda = 5$.

τ	$\overline{X}(\tau)$	$\overline{\Lambda}(\tau)$	$F(\overline{\mathbb{X}}(\tau))$	$L(\overline{\mathbb{X}}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$	$U(\tau, \overline{\mathbb{X}}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	1.178158150	0.054725148	-1.025760791	-0.926060226	-0.685367291
10^{-2}	3.080324420	8.155065201	5.635349344	4.980298460	5.286837510
10^{-3}	3.007582555	7.712219493	5.058305553	4.999827224	5.027023583
10^{-4}	3.000754080	7.671191736	5.005783012	4.999998294	5.002686906
10^{-5}	3.000075367	7.667118874	5.000577830	4.999999983	5.000268537
10^{-6}	3.000007536	7.666711884	5.000057778	5.000000000	5.000026852
10^{-7}	3.000000754	7.666671188	5.000005778	5.000000000	5.000002685
10^{-8}	3.000000075	7.666667119	5.000000578	5.000000000	5.000000269

Таблица 1.3.2

Решение системы 1.3.3 с начальной точкой $x = -2$ и $\lambda = 0.00001$.

τ	$\overline{X}(\tau)$	$\overline{\Lambda}(\tau)$	$F(\overline{X}(\tau))$	$L(\overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$	$U(\tau, \overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	-1.165044573	0.023995523	1.026276558	1.126218979	1.449236571
10^{-2}	-1.155742025	0.002406295	1.026399226	1.036399168	1.091695866
10^{-3}	-1.154804753	0.000240685	1.026400466	1.027400466	1.035232487
10^{-4}	-1.154710961	0.000024069	1.026400478	1.026500478	1.027513937
10^{-5}	1.154702885	0.000005419	-1.026400479	-1.026390479	-1.026274223
10^{-6}	1.154700773	0.000000542	-1.026400479	-1.026399479	-1.026385550
10^{-7}	3.000000754	7.666671188	5.000005778	5.000000000	5.000002685
10^{-8}	3.000000075	7.666667119	5.000000578	5.000000000	5.000000269

Таблица 1.3.3

Решение системы 1.3.3 с начальной точкой $X = 2$ и $\lambda = 0.00001$.

τ	$\overline{X}(\tau)$	$\overline{\Lambda}(\tau)$	$F(\overline{X}(\tau))$	$L(\overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$	$U(\tau, \overline{X}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	1.178158936	0.054725145	-1.025760748	-0.926060232	-0.685367291
10^{-2}	1.157047644	0.005425916	-1.026394113	-1.016394408	-0.969228576
10^{-3}	1.154935201	0.000541986	-1.026400415	-1.025400415	-1.018380145
10^{-4}	1.154724004	0.000054192	-1.026400478	-1.026300478	-1.025368181
10^{-5}	1.154702885	0.000005419	-1.026400479	-1.026390479	-1.026274223
10^{-6}	1.154700773	0.000000542	-1.026400479	-1.026399479	-1.026385550
10^{-7}	3.000000754	7.666671188	5.000005778	5.000000000	5.000002685
10^{-8}	3.000000075	7.666667119	5.000000578	5.000000000	5.000000269