

## Задачи параметрического программирования

### Сглаживающее свойство функций обратных связей

Теорема 2.1.3 утверждает, что вектор-функции  $\bar{X}(\tau)$  и  $\bar{L}(\tau)$ , аппроксимирующие решения задачи (1.1.1), непрерывно дифференцируемы по инструментальному параметру  $\tau$ .

Рассмотрим теперь задачу (1.1.1) содержащую в своей постановке числовые экзогенные параметры.

Можно показать, что в этом случае стационарные точки  $U$ -функции являются непрерывно дифференцируемыми функциями и от параметров экзогенного типа. Что, свою очередь, позволяет использовать метод функций обратных связей для решения оптимизационных задач более общих, чем задача (1.1.1).

Действительно, пусть  $V = \|v_1 v_2 \dots v_K\|^T \in E^K$  есть вектор числовых экзогенных параметров задачи:

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } X \in E^n \text{ функцию } F(X, V) \\ & \text{на множестве } V \in \Upsilon, \text{ где } \Upsilon \text{ есть компакт в } E^K, \\ & \text{при условиях: } X \in \Theta_v : \{ X \mid f_i(X, V) \leq 0 \quad i = \overline{1, m} \}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

**Определение 2.3.1** Решением задачи (2.3.1) будем считать некоторое описание зависимости векторов  $\operatorname{argmax}_{x \in \Theta_v} F(X, V)$  от векторов экзогенных параметров  $V \in \Upsilon$ .

Эту зависимость для краткости мы будем обозначать как  $X_v^*$ .

Данное определение иллюстрирует легко проверяемый

**Пример 2.3.1:**

максимизировать по  $x$  функцию  $v_1 x$   
 при условиях:  $x \geq 0$ ,  $x \leq 5$ ,  $x \leq 5v_2$   
 для  $\Upsilon = \{v_1 \geq 0; v_2 \in \mathbb{R}\}$ .

Описание его решения может иметь вид:

$$\text{в случае } v_1 > 0 \quad x_v^* = \begin{cases} \emptyset & \text{при } -\infty < v_2 < 0, \\ 5v_2 & \text{при } 0 \leq v_2 \leq 1, \\ 5 & \text{при } v_2 > 1, \end{cases}$$

$$\text{для } v_1 = 0 \quad x_v^* = \begin{cases} \emptyset & \text{при } -\infty < v_2 < 0, \\ [0, 5v_2] & \text{при } 0 \leq v_2 \leq 1, \\ [0, 5] & \text{при } v_2 > 1. \end{cases}$$

Графическое представление этого решения показано на рис. 2.3.1а.

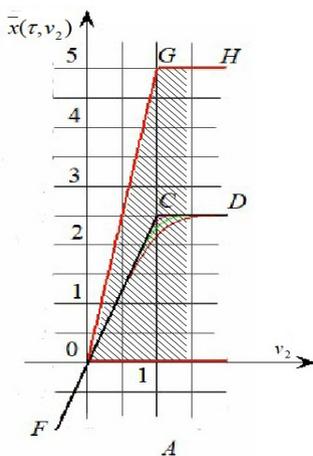


Рис. 2.3.1.

Здесь необходимо сделать важное замечание: помимо параметров, в постановке задачи (2.3.1) существенным является наличие ограничений типа «неравенство».

Этот факт обуславливает следующие особенности решений задачи (2.3.1):

- область определения зависимости  $X_v^*$  может *быть уже* области определения по  $V$  для функций  $F(X, V)$  и  $f_i(X, V)$   $i = \overline{1, m}$ ,
- зависимость  $X_v^*$  может быть *нефункциональной (неоднозначной)*,
- наконец, зависимость  $X_v^*$  даже, если она и является функцией от  $V$ , может не иметь производных по компонентам этого вектора.

Отмеченные свойства усложняют процедуру решения как задач типа 2.3.1, так и задач, в постановках которых используются зависимости вида  $x_v^*$ .

Для иллюстрации отметим (см. рис. 2.3.1а), что в примере 2.3.1

при  $v_2 < 0$  зависимость  $x_v^*$  не определена, хотя все функции в условии примера для таких значений параметра  $v_2$  существуют.

При  $v_1 > 0$  производная в точке  $v_2 = 1$  для  $x_v^*$  по  $v_2$  не существует.

Для  $v_1 = 0$  при  $v_2 > 0$  зависимость  $x_v^*$  определена неоднозначно, то есть функцией не является.

К настоящему времени разработано значительное число алгоритмов решения оптимизационных задач с экзогенными параметрами, например, методами *недифференцируемой оптимизации* [2, 6, 13] или *теории чувствительности* [16]. Эти алгоритмы позволяют преодолеть вычислительные затруднения, порождаемые специфическими свойствами зависимостей  $x_v^*$ .

Однако при этом практический интерес также представляют традиционные методы решения задач вида (2.3.1), основанные на разложениях по *формуле Тейлора*.

Далее в этом параграфе мы рассмотрим один из таких алгоритмов. Он использует функции обратных связей для построения *гладкой функции*  $\bar{X}(\tau, V)$ , аппроксимирующей зависимость  $X_v^*$ . То есть такую функцию, для которой предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} F(\bar{x}(\tau, V), V) = F(X_v^*, V),$$

выполняется  $\forall V \in \Upsilon$ . Причем в случае, когда  $X_v^*$  есть просто вектор, это равенство усиливается до  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{X}(\tau, V) = X_v^*$ .

Конкретно, в качестве такой  $\bar{X}(\tau, V)$  предлагается использовать седловую точку вспомогательной функции (2.1.2), построенную для задачи (2.3.1). Действительно, в этом случае вектор-функция  $\bar{X}(\tau, V)$  существует, функциональна и гладкая  $\forall V \in \Upsilon$ .

Это позволяет говорить о *сглаживающем свойстве* метода функций обратных связей.

Заметим, что в предлагаемом подходе аппроксимирующая вектор-функция  $\bar{X}(\tau, V)$  определяется *неявно*. Это создает дополнительные вычислительные проблемы. Однако теорема о системе неявных функций [6] позволяет их преодолевать, используя вместо  $\bar{X}(\tau, V)$  ее тейлоровские многочлены подходящих порядков.

Рассмотрим схему применения метода функций обратных связей для решения задачи (2.3.1) с конечным значением  $F_v^*$ . Будем предполагать, что все формулируемые условия выполняются  $\forall V \in \Upsilon$ .

Построим для задачи (2.3.1) вспомогательную функцию

$$U(\tau, X, \Lambda, V) = L(X, \Lambda, V) + W(\tau, \Lambda), \quad \text{где } W(\tau, \Lambda) = \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) \quad (2.3.2)$$

и рассмотрим ее свойства.

При сделанных предположениях и фиксированном векторе параметров  $V \in \Upsilon$  справедливы (их доказательства аналогичны, приведенным в § 2.1) следующие утверждения.

**Теорема 2.3.1.**  $\forall \tau \in (0, \tau_0]$  функция  $U(\tau, X, \Lambda, V)$  имеет единственную седловую точку  $\{\bar{X}(\tau, V); \bar{\Lambda}(\tau, V)\}$  внутри компакта  $\Omega_x \otimes \Omega_\Lambda$ , где векторы  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$  суть решения системы уравнений

$$\begin{cases} \text{grad}_x U(\tau, \bar{X}, \bar{\Lambda}, V) = o, \\ \text{grad}_\lambda U(\tau, \bar{X}, \bar{\Lambda}, V) = o. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Для задачи (2.3.1) система уравнений (2.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i(\tau, V) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, & j = \overline{1, n}, \\ f_i(\bar{X}(\tau, V)) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_i(\tau, V)), & i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (2.3.4)$$

который по структуре также как и в системе (2.1.4) подобен условиям теоремы Каруша-Куна-Таккера. При этом он также не содержит в явном виде условий неотрицательности множителей Лагранжа и условий дополняющей нежесткости.

Напомним, что, определяемые неявно системой (2.3.3), вектор-функции  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$  задают в  $\Omega_x \otimes \Omega_\Lambda$  параметрически (с параметром  $\tau$ ) линию, которую мы называем *седловой траекторией задачи* (2.3.1).

**Теорема 2.3.2.** На седловой траектории задачи (2.3.1)

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U\left(\tau, \bar{X}(\tau, V), \bar{\Lambda}(\tau, V), V\right) = F_v^*. \quad (2.3.5)$$

В случае локальной единственности решения этой задачи справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{X}(\tau, V) = X_v^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau, V) = \Lambda_v^*. \quad (2.3.6)$$

**Теорема 2.3.3.** На седловой траектории вектор-функции  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$  непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам  $\forall \tau > 0 \quad \forall V \in \Upsilon$ .

Найдем из (2.3.4) для фиксированных  $V \in \Upsilon$  и положительного  $\tau$  значения вектор-функций  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$ . Затем применим к системе (2.3.3) теорему о неявных функциях [6]. В итоге  $\forall r = \overline{1, K}$  получим системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial v_r} \quad p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_r} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_r} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial v_r} \quad q = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (2.3.7)$$

которые определяют значения частных производных от компонент вектор-функций  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$  по компонентам вектора  $V$ .

При необходимости можно очевидным образом усилить предположения о свойствах функций обратных связей, равно как и функций входящих в условие задачи (2.3.1). Тогда по аналогичной схеме найдутся частные производные более высокого порядка от  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$ .

Набор теорем 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.3 позволяет использовать вектор-функции  $\bar{X}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}(\tau, V)$  как *аппроксимации* соответственно зависимостей  $X_v^*$  и  $\Lambda_v^*$ . Эти аппроксимации гладкие и допускают для своего исследования применение вычислительных процедур основанных на формуле Тейлора.

Применение метода функций обратных связей проиллюстрируем для решения примера 2.3.1 с параметрами  $v_1 \geq 0$  и  $v_2 \in \mathbb{R}$ .

Построим гладкую аппроксимацию зависимости  $x_v^*$  для примера 2.3.1, взяв  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$  в качестве функции обратных связей. вспомогательная функция (2.3.2) этом случае будет

$$U(\tau, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v_1, v_2) = \\ = v_1 x - \lambda_1(-x) - \lambda_2(-5+x) - \lambda_3(-5v_2+x) + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3),$$

а условие ее стационарности (система (2.3.4)) имеет вид

$$\begin{cases} v_1 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 & = 0, \\ \bar{x} + \tau \ln \bar{\lambda}_1 & = 0, \\ -\bar{x} + 5 + \tau \ln \bar{\lambda}_2 & = 0, \\ -\bar{x} + 5v_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_3 & = 0. \end{cases}$$

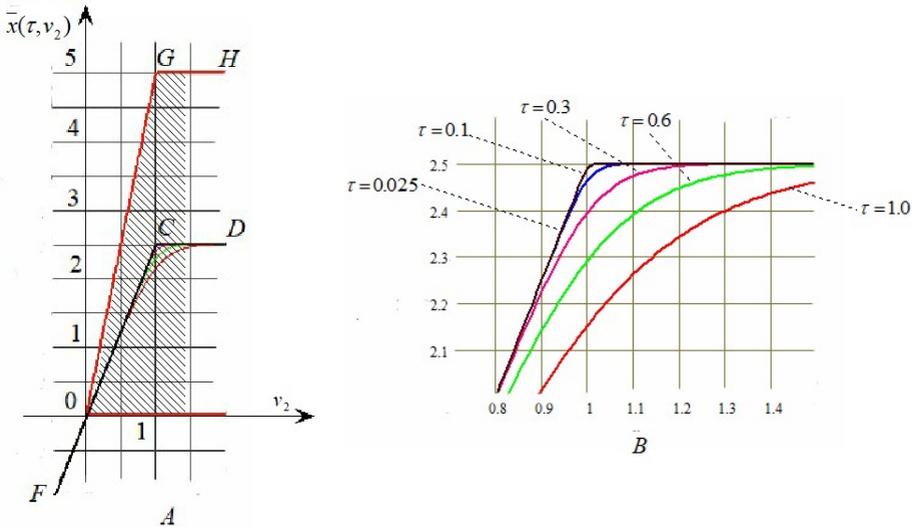


Рис. 2.3.1. График функции  $\bar{x}(\tau, v_2)$  для примера 2.3.1

Опуская очевидные преобразования, приведем итоговый вид искомой аппроксимации для зависимости  $x_v^*$ :

$$\bar{x}(\tau, v_1, v_2) = -\tau \ln \left( \sqrt{\frac{v_1^2}{4} + e^{-\frac{5}{\tau}} + e^{-\frac{5v_2}{\tau}}} - \frac{v_1}{2} \right).$$

Эта функция определена  $\forall \tau > 0$ ,  $\forall v_1 \geq 0$  и  $\forall v_2 \in \mathbb{R}$ . В этой области она имеет производные любого порядка по совокупности всех ее аргументов. Раскрытие неопределенностей при  $\tau \rightarrow +0$  в случае  $v_1 > 0$  дает  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) = 5v_2$  при  $0 \leq v_2 \leq 1$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) = 5$  при  $v_2 > 1$ .

Теперь найдем значения предела  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2)$  в случаях, когда  $x_v^*$  определена неоднозначно. При  $v_1 = 0$  и  $0 < v_2 < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) &= -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( e^{-\frac{5}{\tau}} + e^{-\frac{5v_2}{\tau}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left( \tau \ln e^{-\frac{5v_2}{\tau}} + \tau \ln \left( 1 + e^{\frac{5v_2-5}{\tau}} \right) \right) = \frac{5}{2} v_2. \end{aligned}$$

Для  $v_1 = 0$  и  $v_2 \geq 1$  результат  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) = \frac{5}{2}$  получается аналогично:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) &= -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( e^{-\frac{5}{\tau}} + e^{-\frac{5v_2}{\tau}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left( \tau \ln e^{-\frac{5}{\tau}} + \tau \ln \left( 1 + e^{\frac{5-5v_2}{\tau}} \right) \right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Далее заметим, что задача 2.3.1 несовместна  $\forall v_2 < 0$  в силу противоречивости ограничений  $x \geq 0$  и  $x \leq 5v_2$ . Однако функция  $\bar{x}(\tau, v_1, v_2)$  существует при  $\forall v_1 \geq 0$  с  $\forall v_2 < 0$ . В этом случае имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau, v_1, v_2) = \frac{5}{2} v_2.$$

Это значение можно рассматривать как некоторый компромисс для конфликтующих условий.

На рис. 1а ломаная линия  $F0GH$  есть график  $x_v^*$ , решения примера 2.3.1  $\forall v_1 > 0$ , ломаная  $FCD$  есть график той же зависимости при  $v_1 = 0$ . Множество неоднозначных значений  $x_v^*$  отмечено штриховкой.

Здесь также показаны графики аппроксимирующей функции для значений инструментального параметра  $\tau = 1, 0.6, 0.3, 0.1, 0.025$ .

На рис. 1в приведены в *большем* масштабе те же графики в окрестности точек с  $v_2 = 1$ , где зависимость  $x_v^*$  функциональна, но недифференцируема. Эффект сглаживания на этом рисунке более заметен. Также очевидна связь этого эффекта со значением параметра  $\tau$ .

В заключение еще раз отметим важное свойство аппроксимации при помощи функций обратных связей решения задачи (2.3.1)  $x_v^*$ . В примере 2.3.1 аппроксимирующая функция  $\bar{x}(\tau, v_1, v_2)$  оказалась определенной  $\forall v_2 \in \mathbb{R}$ , в то время как, сама зависимость  $x_v^*$  существует лишь при  $v_2 \geq 0$ .

## Глобальный экстремум функций

Метод функций обратных связей позволяет решать не только задачу (1.1.1), но и различные сводящиеся к ней оптимизационные задачи.

Рассмотрим вначале применение этого метода для простого поиска экстремума в конечном наборе чисел.

Значение максимального из чисел в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$ , как нетрудно проверить, есть оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования:

$$\text{минимизировать } f \quad \text{при условиях: } f \geq v_i \quad i = \overline{1, K}.$$

или в равносильной ей задаче

$$\text{максимизировать } -f \quad \text{при условиях: } v_i - f \leq 0 \quad i = \overline{1, K}. \quad (3.1.1)$$

Переменная  $f$  не имеет ограничения на знак, поэтому вспомогательная функция (2.1.2) при решении задачи (3.1.1) методом функций обратных связей будет:

$$U(\tau, f, \Lambda, V) = -f - \sum_{i=1}^K \lambda_i (v_i - f) + \sum_{i=1}^K R(\tau, \lambda_i), \quad (3.1.2)$$

Если выбрать  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , то условие стационарности функции (3.1.2) (то есть система уравнений (2.1.3)) примет вид

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ -v_i + \bar{f} + \tau \ln \bar{\lambda}_i = 0 \quad i = \overline{1, K} \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\lambda}_i = e^{\frac{v_i - \bar{f}}{\tau}} \quad i = \overline{1, K}, \\ \bar{f} = \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right). \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Откуда получим значения максимального и соответственно минимального числа в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) \quad \text{и} \quad f_{\min}^* = - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{-\frac{v_i}{\tau}} \right). \quad (3.1.4)$$

Оценим теперь погрешность значения  $f_{\max}^*$ , получаемого по формуле  $\bar{f}(\tau) = \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right)$ . Будем считать, что в наборе  $\{v_1, v_2, \dots, v_K\}$  числа упорядочены в порядке убывания и первые  $M$  (здесь  $M < K$ ) из них равны  $f^*$ . Тогда имеем

$$\bar{f}(\tau) - f^* = \tau \ln \left( \sum_{i=1}^K e^{\frac{v_i}{\tau}} \right) - \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} = \tau \ln \left( M + \sum_{i=M+1}^K e^{\frac{v_i - f^*}{\tau}} \right).$$

Значит, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \bar{f}(\tau) - f^* &\leq \tau \ln \left( M + (K - M)e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) = \\ &\leq \tau \ln M + \tau \ln \left( 1 + \frac{K - M}{M} e^{\frac{A - f^*}{\tau}} \right) \leq \tau \ln M + \tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}, \end{aligned}$$

где  $A = v_{M+1}$ . С другой стороны, очевидно  $\bar{f}(\tau) - f^* \geq \tau \ln M$ .

Полученные неравенства означают, что главная часть погрешности при  $\tau \rightarrow +0$  будет  $\tau \ln M$ , когда  $M \geq 2$ . То есть, в случае, когда в исследуемом наборе максимальное число не единственное. Если же  $M = 1$ , то верхняя оценка погрешности будет определяться величиной  $\tau e^{\frac{A - f^*}{\tau}}$ .

Заметим, что эта оценка погрешности получена благодаря специальному виду функции обратных связей. Если же, например, взять

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \quad \text{с} \quad R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{s^2}{2} - \ln s + \frac{1}{2} \right),$$

то система уравнений (3.1.3) примет вид

$$\begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^K \bar{\lambda}_i = 0, \\ v_i - \bar{f} = \frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda}_i - \frac{1}{\bar{\lambda}_i} \right) \quad i = \overline{1, K}, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

для которого возможно лишь численное решение.

Для иллюстрации в табл. 3.1.1 приведены результаты решения системы (3.1.3) для набора чисел  $\{ 5, -2, 4, 7, 0 \}$  при различных значениях параметра  $\tau$ .

Таблица 3.1.1.

$\tau$	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{x}_3(\tau)$	$\bar{x}_4(\tau)$	$\bar{x}_5(\tau)$
$10^{-0.00}$	7.170719212	0.114095529	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.041973399	0.843058261	$7.6877 \cdot 10^{-4}$
$10^{-0.25}$	7.018454440	0.027615558	$1.0841 \cdot 10^{-7}$	$4.6651 \cdot 10^{-3}$	0.967715479	$3.7990 \cdot 10^{-6}$
$10^{-0.50}$	7.000590038	$1.7884 \cdot 10^{-3}$	$4.355 \cdot 10^{-13}$	$7.5703 \cdot 10^{-5}$	0.998135874	$2.430 \cdot 10^{-10}$
$10^{-0.75}$	7.000002329	$1.3048 \cdot 10^{-5}$	$4.355 \cdot 10^{-13}$	$4.7135 \cdot 10^{-8}$	0.999986904	0.000000000
$10^{-1.00}$	7.000000000	$2.0612 \cdot 10^{-9}$	0.000000000	$9.358 \cdot 10^{-14}$	0.999999998	0.000000000
$10^{-1.25}$	7.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	1.000000000	0.000000000

В табл. 3.1.2 для сравнения приведены численные решения системы (3.1.5) для набора чисел  $\{ 5, 5, 4, 5, 0 \}$  также при различных значениях параметра  $\tau$ .

Таблица 3.1.2.

$\tau$	$\bar{f}(\tau)$	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{x}_3(\tau)$	$\bar{x}_4(\tau)$	$\bar{x}_5(\tau)$
$10^{-1.00}$	5.109862742	0.333328289	0.333328289	$1.5133 \cdot 10^{-5}$	0.333328289	0.000000000
$10^{-1.20}$	5.069317752	0.333333319	0.333333319	$4.3629 \cdot 10^{-8}$	0.333333319	0.000000000
$10^{-1.50}$	5.034741173	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-2.00}$	5.010986124	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-4.00}$	5.000109861	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000
$10^{-7.00}$	5.000000110	0.333333333	0.333333333	0.000000000	0.333333333	0.000000000

Рассмотрим теперь задачу отыскания экстремальных значений для числовых множеств мощности *континуум*.

Пусть дана интегрируемая на компакте с не пустой внутренностью  $\Omega \subset E^n$  функция  $f(x)$ . Заменяя в формулах (3.1.4) операцию суммирования интегрированием, получим оценку значения глобального максимума функции многих переменных вида:

$$f_{\max}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx. \quad (3.1.6)$$

Справедливость (3.1.6) следует из условия  $f(x) \leq f^*$  и оценок:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)}{\tau}} dx &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln e^{\frac{f^*}{\tau}} \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx = \\ &= f^* + \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx, \\ 0 &\leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{f(x)-f^*}{\tau}} dx \leq \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \text{mes } \Omega = 0. \end{aligned}$$

Следующие примеры иллюстрируют применение формулы (3.1.6).

**Пример 3.1.1.** *Найти на множестве  $\Omega$  глобальные экстремумы для функции  $f(x) = |x - 1| - 2|x|$  по  $x \in E^1$ . Множество  $\Omega = \{-1 \leq x \leq v\}$  зависит от экзогенного параметра  $v \in [1, 3]$ .*

**Решение.** Для глобального максимума  $\forall v \in [1, 3]$  имеем

$$\begin{aligned} f_{\max}^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{-1}^v e^{\frac{|x-1|-2|x|}{\tau}} dx = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[ \int_{-1}^0 e^{\frac{x+1}{\tau}} dx + \int_0^1 e^{\frac{-3x+1}{\tau}} dx + \int_1^v e^{\frac{-x-1}{\tau}} dx \right] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \tau \left[ \left( e^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left( e^{\frac{1}{\tau}} - e^{-\frac{2}{\tau}} \right) + \left( e^{-\frac{2}{\tau}} - e^{-\frac{v+1}{\tau}} \right) \right] = 1. \end{aligned}$$

Он достигается при  $x = 0 \quad \forall v \in [1, 3]$ .

Для глобального минимума имеем

$$\begin{aligned} f_{\min}^* &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{-1}^v e^{-\frac{|x-1|-2|x|}{\tau}} dx = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[ \int_{-1}^0 e^{-\frac{x+1}{\tau}} dx + \int_0^1 e^{\frac{3x-1}{\tau}} dx + \int_1^v e^{\frac{x+1}{\tau}} dx \right] = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \left[ \tau \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) + \frac{\tau}{3} \left( e^{\frac{2}{\tau}} - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) + \tau \left( e^{\frac{v+1}{\tau}} - e^{\frac{2}{\tau}} \right) \right] = -v-1. \end{aligned}$$

Этот минимум достигается при  $x = v \quad \forall v \in [1, 3]$ .

График функции  $y = |x - 1| - 2|x|$  показан на рис. 3.1.1. Множество  $\Omega$  выделено серым цветом. Точка  $A$  — глобальный максимум, точка  $B$  — глобальный минимум.

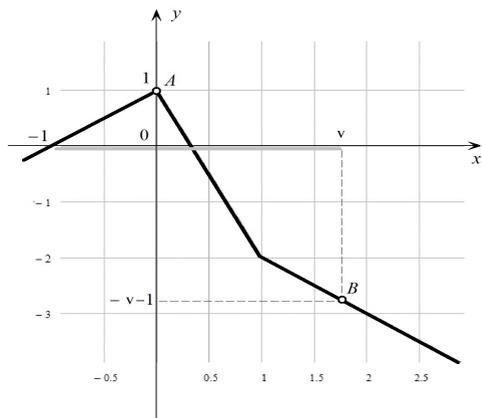


Рис. 3.1.1. График функции  $y = |x - 1| - 2|x|$ .

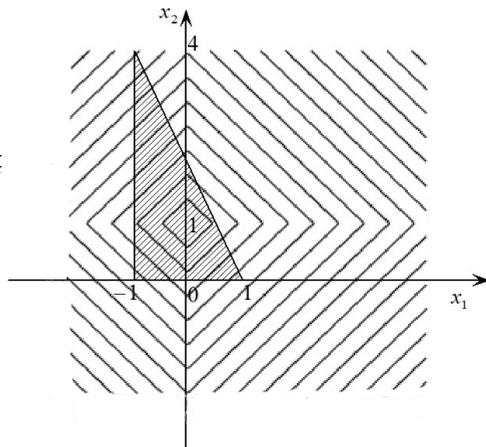


Рис. 3.1.2. Система изолиний для  $f(x) = |x_1| + |x_2 - 1|$ .

Пример 3.1.2. Найти глобальные экстремумы по  $x \in \Omega \subseteq E^2$  функции  $f(x) = |x_1| + |x_2 - 1|$ , где

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0. \end{array} \right\}.$$

Решение. Для глобального максимума имеем:

$$\begin{aligned} f_{\max}^* &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{\frac{|x_1| + |x_2 - 1|}{\tau}} dx_1 dx_2 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \frac{\tau^2}{3} e^{\frac{2}{\tau}} \left( 5 - 10e^{-\frac{1}{\tau}} + e^{\frac{2}{\tau}} - 8e^{-\frac{3}{2\tau}} + 12e^{-\frac{2}{\tau}} \right) = 4. \end{aligned}$$

Он достигается на границе области  $\Omega$  при  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 4$  (см. рис. 3.1.2).

Глобальный минимум внутренней негладкий, в точке  $x_1 = 0, x_2 = 1$

$$\begin{aligned} f_{\min}^* &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \iint_{\Omega} e^{-\frac{|x_1| + |x_2 - 1|}{\tau}} dx_1 dx_2 = \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \frac{\tau^2}{3} \left( 5e^{-\frac{2}{\tau}} - 10e^{-\frac{1}{\tau}} + e^{-\frac{4}{\tau}} - 8e^{-\frac{1}{2\tau}} + 12 \right) = 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что оптимальное значение целевой функции в задаче математического программирования

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать} & F(x) \quad x \in E^n \\ \text{при условии} & x \in \Omega \subseteq E^n \end{array}$$

может быть представлено (при соответствующих предположениях о свойствах  $F(x)$  и  $\Omega$ ) как

$$F^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau \ln \int_{\Omega} e^{\frac{F(x)}{\tau}} dx .$$

## Функция максимума

Метод функций обратных связей может также оказаться полезным при решении задач, более сложных чем (2.3.1).

Рассмотрим задачи, в постановке которых используются суперпозиции операций поиска экстремума<sup>1</sup>

Рассмотрим следующую задачу:

*найти минимум по  $X$   $Y(X)$ :  
при условии  $X \in \Omega$ , где  $\Omega \subseteq E^n$  – компакт, а*

$$Y(X) = \max_{k=1, \overline{K}} \{y_k(X)\}, \quad (3.2.1)$$

предполагая, что функции  $y_k(X)$   $k = \overline{1, K}$ , непрерывно дифференцируемые на  $\Omega$ .

---

<sup>1</sup>См., например, [2], [14]. Альтернативный метод такого анализа, основанный на использовании штрафных функций внешнего типа, был предложен в [11]. Он обоснован и развит в [27].

В случае, когда множество допустимых аргументов  $\Omega$  задается системой неравенств вида  $f_i(X) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}$ , задача (3.2.1) равносильна задаче математического программирования:

*максимизировать по  $\{X, v\}$  функцию  $-v$   
при условиях*

$$y_k(X) - v \leq 0 \quad k = \overline{1, K} \quad (3.2.2)$$

и

$$f_i(X) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь  $v$  независимая скалярная переменная. Мы также предполагаем, что функции  $f_i(X) \quad i = \overline{1, m}$ , непрерывно дифференцируемые на множестве  $\Omega$ .

Зависимость  $V_x^*$  в сделанных предположениях является непрерывной, но недифференцируемой во всей своей области определения функции. Поэтому для решения задачи (3.2.2) применим метод функций обратных связей с вспомогательной функцией

$$\begin{aligned}
 U(\tau, X, \Lambda, v) = & -v - \sum_{k=1}^K \mu_k (y_k(X) - v) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X) + \\
 & + \sum_{k=1}^K R(\tau, \mu_k) + \sum_{k=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (3.2.3)
 \end{aligned}$$

где  $\Lambda = \{\mu_1, \dots, \mu_K, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \}$

Условия стационарности для функции (3.2.3) можно записать в виде системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k \cdot \text{grad}_x y_k(\bar{X}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \cdot \text{grad}_x f_i(\bar{X}) = 0, \\
 -y_k(\bar{X}) + \bar{v} + Q(\tau, \bar{\mu}_k) = 0 \quad k = \overline{1, K}, \\
 -f_i(\bar{X}) + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 \quad i = \overline{1, m}, \\
 -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

Если задача поиска минимакса не имеет ограничений, а функция обратных связей определена как  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$ , то условия стационарности вспомогательной функции упрощаются

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^K \bar{\lambda}_k \cdot \operatorname{grad}_x y_k(\bar{X}) = o, \\ \bar{\mu}_k = e^{\frac{y_k(\bar{X}) - \bar{v}}{\tau}} \quad k = \overline{1, K}, \\ -1 + \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_k = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

Заметим, что из двух последних равенств получается сглаженная аппроксимация исследуемой функции  $\bar{v}(\tau, \bar{X}) = \tau \ln \sum_{k=1}^K e^{\frac{y_k(\bar{X})}{\tau}}$ . Первые два равенства в (3.2.5) являются необходимыми условиями стационарности по  $X$  для этой аппроксимации.

В качестве иллюстрации рассмотрим

Пример 3.2.1. *Найти минимум функции*  $v(x) = \max \{x^2; \sin 4x\}$ .

Решение. Данная задача сводится к задаче математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{x, v\} \quad -v \\ & \text{при условиях:} \quad x^2 - v \leq 0, \quad \sin 4x - v \leq 0. \end{aligned}$$

Из (3.2.5) получаем, что аппроксимация функции максимума имеет вид

$$\bar{v}(x) = \tau \ln \left( e^{\frac{x^2}{\tau}} + e^{\frac{\sin 4x}{\tau}} \right). \quad (3.2.6)$$

Ее стационарные точки суть корни уравнения

$$\bar{x} e^{\frac{\bar{x}^2}{\tau}} + 2e^{\frac{\sin 4\bar{x}}{\tau}} \cos 4\bar{x} = 0. \quad (3.2.7)$$

Уравнение (3.2.7) имеет три корня, являющихся приближением к точкам

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{\pi}{8} = 0.392699082 \quad \text{и} \quad x_3^* = 0.669283188,$$

последняя из которых есть положительный корень уравнения  $x^2 = \sin 4x$ .

Решения уравнения (3.2.7) для разных значений параметра  $\tau$  приведены в табл. 3.2.1, а графики функции  $\bar{v}(x)$  показаны на рис. 3.2.1.

Т а б л и ц а 3.2.1

$\tau$	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{x}_3(\tau)$
0.50	-0.166596357	0.413732397	0.723794952
0.25	-0.124388280	0.398475953	0.704617207
0.10	-0.077449382	0.392845484	0.688202392
0.05	-0.046509302	0.392699415	0.679216477
Точное решение	0	0.392699082	0.669283188

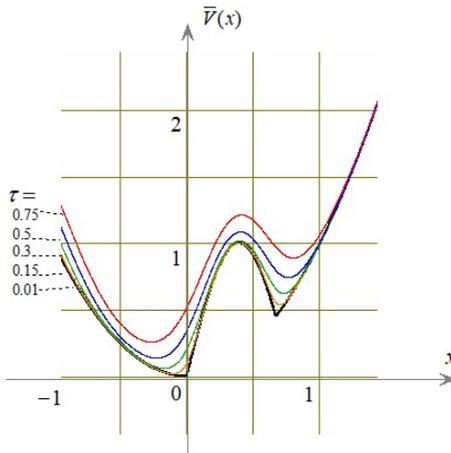


Рис. 3.2.1. Графическая интерпретация задачи 3.2.1

В качестве другой иллюстрации рассмотрим задачу, возникающую в процессе поиска методом дихотомии экстремума функции  $n$  переменных по заданному направлению в  $E^n$ .

Пусть дана непрерывная, унимодальная (то есть, имеющая единственный экстремум) на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция одной переменной  $f(x)$ . Требуется найти на этом отрезке две точки, значения  $f(x)$  в которых, позволяют построить новый отрезок минимально возможной длины, содержащий точку экстремума.

Обозначим искомые точки как  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда из свойств унимодальности следует, что эти точки есть решение следующей задачи:

**Пример 3.2.2.** *Найти минимум по  $\{x_1, x_2\}$  от  $\max\{x_2 - \alpha, \beta - x_1\}$  при условии  $x_1 \leq x_2$ .*

**Решение.** Эта минимаксная задача сводится к задаче параметрического программирования вида

*найти максимум по  $\{v, x_1, x_2\}$   $-v$   
при условиях*

$$\begin{aligned}x_2 - \alpha &\leq v, \\ \beta - x_1 &\leq v, \\ x_1 - x_2 &\leq 0.\end{aligned}$$

Вспомогательная функция для этой задачи будет

$$\begin{aligned}U(\tau, X, \Lambda, V) = & -v - \lambda_1(x_2 - \alpha - v) - \lambda_2(\beta - x_1 - v) - \\ & - \lambda_3(x_1 - x_2) + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3).\end{aligned}$$

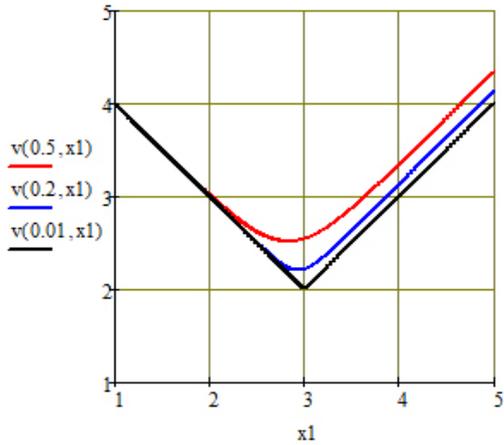


Рис. 3.2.2. Графическое представление слаженных аппроксимаций для задачи 3.2.2

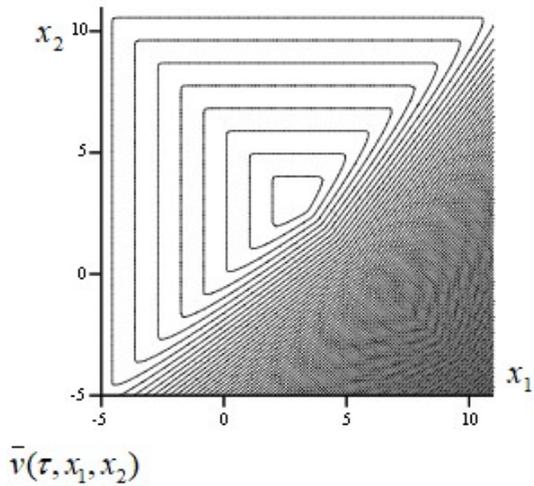


Рис. 3.2.3. Графическое представление системы изолиний функции  $\bar{v}(\tau, x_1, x_2)$  слаженной аппроксимации для задачи 3.2.2

Условия стационарности последовательно по  $v, x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$  с функцией обратной связи  $Q(\tau, s) = \tau \ln s$  будут

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 0, \\ \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 = 0, \\ -\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 = 0, \\ -\bar{x}_2 + \alpha + \bar{v} + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ -\beta + \bar{x}_1 + \bar{v} + \tau \ln \bar{\lambda}_2 = 0, \\ -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

Из (3.2.8) получаем  $\bar{v} = \tau \ln \left( e^{\frac{\bar{x}_2 - \alpha}{\tau}} + e^{\frac{-\bar{x}_1 + \beta}{\tau}} \right)$  и  $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \tau \ln 2 > 0$ , что дает для зависимости  $v_{x_1}$  аппроксимацию

$$\bar{v}(\tau, x_1) = \tau \ln \left( 2e^{\frac{x_1 - \alpha}{\tau}} + e^{\frac{-x_1 + \beta}{\tau}} \right),$$

график которой показан со значениями для параметров  $\alpha = 1, \beta = 5$  и  $\tau = 0.5, 0.2, 0.01$  на рис. 3.2.1.

Нетрудно проверить, что эта аппроксимация функции максимума имеет минимум в точке

$$x_1(\tau) = \frac{\alpha + \beta}{2} + \tau \ln \sqrt{2}.$$

Заметим, что задача 3.2.2 в обычном смысле решения не имеет. Но у исследуемого минимакса есть *инфимум*, равный  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 3$ .

В заключение заметим, что использование в описанной схеме для учета ограничения  $x_1 \leq x_2$  какой-либо достаточно гладкой штрафной функции позволяет получать аппроксимацию также и двумерной зависимости  $v_{x_1, x_2}$ . Вид системы изолиний для такой аппроксимации при  $\alpha = -5$ ,  $\beta = 11$  и  $\tau = 0.05$  показан на рис. 3.2.2.