Задачи для многокритериальных моделей

Покажем, что такой вариант метода функций обратных связей применим при решении оптимизационных задач вида (2.3.1) для параметрических *многокритериальных* математических моделей.

Как известно, в математическом моделировании при формировании критериев оценки состояний моделируемого объекта нередко возникает не одна, а некоторый набор независимых друг от друга целевых функций.

В этом случае *многокритериальной моделью* будем назывть совокупность подлежащих максимизации по $X \in E^n$ функций

$$F_k(X,V) \qquad k = \overline{1,N}\,, \tag{3.4.1}$$

при условиях

$$f_i(X,V) \le 0 \qquad i = \overline{1,m}\,, \tag{3.4.2}$$

где $V \in \Upsilon \subseteq E^K$ вектор экзогенных параметров.

Будем также считать, что все функции $F_k(X,V)$ и $f_i(X,V)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

При принятии управленческих решений с помощью многокритериальных моделей могут возникать различные типы задач оптимизации.

Например очевидно, что одновременное достижение всеми целевыми функциями (3.4.1) экстремумов в некоторой из точек множества, определяемого системой неравенств (3.4.2), в общем случае невозможно. Поэтому на практике часто используются постановки задач, допустимые решения которых являются некоторым *компромиссом* для критериев (3.4.1).

Основой для построения компромисса могут служить решения однокритериальных задач вида

$$\begin{array}{ll} \textit{максимизировать по } X \in E^n & \textit{функцию } F_k(X,V) \\ \textit{при условиях:} & f_i(X,V) \le 0 \quad i = \overline{1,m}. \end{array} \tag{3.4.3}$$

Решение каждой из этих задач (т.е. вектор $X^*_{(k)v}$, а также значение $F^*_{(k)v} = F_k\big(X^*_{(k)v}, V\big)$ $k = \overline{1,N}$ есть наилучшее по k-му критерию допустимое состояние модели (3.4.1)—(3.4.2) при фиксированном векторе параметров $V \in \Upsilon$.

Рассмотрим случай, когда задача определения компромиссного состояния заключается в поиске допустимой точки X_v^{**}, в которой достигается экстремум некоторой *количественной оценки качества компромисса.*

Такой точкой, например, может служить вектор X, удовлетворяющий ограничениям (3.4.2) и доставляющий *минимум* максимальной (по $k = \overline{1,N}$) из разностей $F^*_{(k)v} - F_k(X,V)$. То есть X есть решение задачи

$$\begin{array}{lll} \textit{максимизировать по } \{X \in E^n; \quad \rho \geq 0\} & \textit{функцию} & -\rho \\ \textit{при условиях:} \quad f_i(X,V) \leq 0 & & i = \overline{1,m}, \\ F^*_{(k)v} - F_k(X,V) - \rho \leq 0 & & k = \overline{1,N}. \end{array} \tag{3.4.4}$$

Точнее говоря, решение задачи (3.4.4) образуют величина ρ_v^{**} и вектор X_v^{**}. Они являются некоторыми зависимостями от вектора параметров V. Эти зависимости обладают отмеченными в § 2.3 свойствами, которые осложняют решение задач, в условии которых они используются.

Отметим также, что значение ρ_v^{**} может рассматриваться как оценка минимума возможной *рассогласованности* целевых функций в многокритериальной модели (3.4.1)—(3.4.2).

Далее для краткости задачи (3.4.3) будем называть задачами *первого уровня*, а задачу (3.4.4) задачей *второго уровня*.

Другими примерами задач второго уровня, в постановке которых используются решения задач (3.4.3), могут также служить известные (см., например, [15]) в практике математического моделирования: алгоритмы *свертки целевых функций* (3.4.1), методы *поиска равновесия по Парето* и другие вычислительные схемы.

Для полноты картины, отметим, что для модели (3.4.1)—(3.4.2) возможна постановка оптимизационной задач *третьего уровня*, например

$$\textit{найти экстремум } \rho_v^{**} \quad \textit{по } V \in \Upsilon \subseteq E^K . \tag{3.4.5}$$

Решением этой задачи будут являться вектор $V^{***} \in \Upsilon$ и число ρ^{***}, равное значению ρ_v^{**} в точке V^{***}.

Одной из причин вычислительных трудностей при решении задачи (3.4.5) является зависимость ρ_v^{**} в постановке этой задачи.

Данную проблему можно попытаться решить, применив метод функций обратных связей. То есть построив функцию $\overline{\rho}(\tau, V)$, являющуюся гладкой аппроксимацией зависимости ρ_v^{**}.

Действительно, пусть при поиске локального решения задачи (3.4.5) применяется некоторый метод второго порядка. Значит, для его реализации достаточно иметь значения $\overline{\rho}(\tau, V)$ и всех ее частных производных до второго порядка включительно.

Согласно §2.3 значения $\overline{\rho}(\tau, v)$ находятся из условий стационарности для вспомогательной функции (2.3.2). Значения же производных могут быть вычислены с помощью теоремы о неявных функциях, примененной к этим условиям стационарности.

Рассмотрим данный подход конкретно для случая многокритериальной модели (3.4.1)—(3.4.2).

Вначале заметим, что условие задачи (3.4.4) содержит негладкие зависимости $F^*_{(k)v} \quad k = \overline{1,N}$, которые суть решения задач (3.4.3). Поэтому сглаживающим свойством метода функций обратных связей мы воспользуемся не только при решении задачи второго уровня (3.4.4), но также и для задач (3.4.3).

Пусть вспомогательная функция для k-ой задачи (3.4.3)

$$U_{(k)}(\tau, X, \Lambda, V) = F_k(X, V) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(X, V) + \sum_{i=1}^{m} R(\tau, \lambda_i)\,. \qquad (3.4.6)$$

Тогда условия стационарности функции (3.4.6) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial U_{(k)}}{\partial x_p} & = & 0 & p = \overline{1,n}\,, \\ \dfrac{\partial U_{(k)}}{\partial \lambda_i} & = & 0 & i = \overline{1,m} \end{array} \right. \quad \text{или}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{x}{\operatorname{grad}} F_k(\overline{X}_{(k)}, V) - \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_{(k)i} \underset{x}{\operatorname{grad}} f_i(\overline{X}_{(k)}, V) \quad = \quad o\,, \\ \\ -f_i(\overline{X}_{(k)}, V) + Q(\tau, \overline{\lambda}_{(k)i}) = 0 \qquad i = \overline{1,m}\,. \end{array} \right. \qquad (3.4.7)$$

Решение системы (3.4.7) позволяет построить

$$\overline{U}_{(k)}(\tau,V)=U_{(k)}\Big(\tau,\overline{X}_{(k)}(\tau,V),\overline{\Lambda}_{(k)}(\tau,V),V\Big)\,. \tag{3.4.8}$$

Эту гладкую функцию можно использовать как аппроксимацию зависимостей $F^{*}_{(k)v}$ в условии задачи второго уровня (3.4.4).

По теореме 2.1.3 к условиям стационарности вспомогательной функции (3.4.7) возможно применение теоремы о неявных функциях. Это дает $\forall k=\overline{1,N}$ системы линейных уравнений для значений производных от компонент вектор-функций $\overline{X}_{(k)}(\tau,V)$ и $\overline{\Lambda}_{(k)}(\tau,V)$ по параметрам $v_t \quad t=\overline{1,K}$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j\partial x_p}\frac{\partial\overline{x}_p}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\lambda}_q}{\partial v_t}=-\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j\partial v_t} & j=\overline{1,n}\,,\\
\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial\lambda_i\partial x_p}\frac{\partial\overline{x}_p}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial\lambda_i\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\lambda}_q}{\partial v_t}=-\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial\lambda_i\partial v_t} & i=\overline{1,m}\,.
\end{array}\right. \tag{3.4.9}$$

Основная матрица системы линейных уравнений (3.4.9) есть матрица Гессе для вспомогательной функции (3.4.6). Ее элементы, равно как и компоненты столбца правых частей, вычисляются в точке $\big\{\,\overline{X}_{(k)}(\tau,V),\,\overline{\Lambda}_{(k)}(\tau,V)\,\big\}$.

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи *второго уровня* (3.4.4).

Для удобства записи введем обозначения

$$\phi_k(\rho, X, V) = \overline{U}_{(k)}(\tau, V) - F_k(X, V) - \rho \qquad k = \overline{1, N}\,.$$

Тогда условие задачи второго уровня примет вид

$$\begin{array}{lll} \textit{максимизировать по } \{X \in E^n, \rho \geq 0\} & & -\rho \\ \textit{при условиях:} & f_i(X, V) \leq 0 & i = \overline{1, m}, \\ & \phi_k(\rho, X, V) \leq 0 & k = \overline{1, N}. \end{array}$$

Вспомогательная функция (2.3.2) для этой задачи выглядит так:

$$\mathbb{U}(\tau, \rho, X, \Lambda, \mu, V) =$$

$$= -\rho - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(X, V) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k \phi_k(\rho, X, V) - \qquad (3.4.10)$$

$$-R(\tau, \rho) + \sum_{i=1}^{m} R(\tau, \lambda_i) + \sum_{k=1}^{N} R(\tau, \mu_k)\,,$$

где $\|\mu\| = \|\,\mu_1,\, \mu_2,\, \ldots,\, \mu_N\,\|$.

Условия стационарности функции $\mathbb{U}$ имеют вид

$$\begin{cases} -1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \overline{\overline{\mu}}_k - Q(\tau, \overline{\overline{\rho}}) = 0, \\ -\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\overline{\lambda}}_i \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{\overline{X}}, V) - \sum\limits_{k=1}^{N} \overline{\overline{\mu}}_k \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(\overline{\overline{\rho}}, \overline{\overline{X}}, V) = 0 \qquad j = \overline{1,n}\,, \\ -f_i(\overline{\overline{X}}, V) + Q(\tau, \overline{\overline{\lambda}}_i) = 0 \qquad i = \overline{1,m}\,, \\ -\phi_k(\overline{\overline{\rho}}, \overline{\overline{X}}, V) + Q(\tau, \overline{\overline{\mu}}_k) = 0 \qquad k = \overline{1,N}\,, \end{cases} \tag{3.4.11}$$

здесь $\{\ \overline{\overline{\rho}},\ \overline{\overline{X}},\ \overline{\overline{\Lambda}},\ \overline{\overline{\mu}}\ \}$ стационарная точка вспомогательной функции (3.4.10).

По теореме 2.1.3 мы можем использовать теорему о неявных функциях для условий стационарности функции (3.4.10). Это дает систему линейных уравнений (3.4.12), аналогичную системе (2.3.7). Решения системы (3.4.12) суть производные от $\{\,\overline{\overline{\rho}},\ \overline{\overline{X}},\ \overline{\overline{\Lambda}},\ \overline{\overline{\mu}}\,\}$ по параметрам $v_t \quad t=\overline{1,k}$.

Напомним, что, теорема о неявных функциях применима также и для вычисления производных от $\{\,\overline{\overline{\rho}},\ \overline{\overline{X}},\ \overline{\overline{\Lambda}},\ \overline{\overline{\mu}}\,\}$ по инструментальному параметру τ.

Значения этих производных могут быть использованы в экстраполяционных процедурах для уменьшения погрешности сглаженной аппроксимации по формулам

$$\tilde{x}_j=\overline{x}_j(\tau,V)-\tau\frac{\partial\overline{x}_j}{\partial\tau}\quad j=\overline{1,n}\qquad\text{и}\qquad\tilde{\lambda}_i=\overline{\lambda}_i(\tau,V)-\tau\frac{\partial\overline{\lambda}_i}{\partial\tau}\quad i=\overline{1,m}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2U}{\partial\rho^2}\dfrac{\partial\overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2U}{\partial\rho\,\partial x_j}\frac{\partial\overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2U}{\partial\rho\,\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\overline{\lambda}}_q}{\partial v_t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2U}{\partial\rho\,\partial\mu_k}\frac{\partial\overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t}=-\dfrac{\partial^2U}{\partial\rho\,\partial v_t},\\[2ex]
\dfrac{\partial^2U}{\partial x_p\,\partial\rho}\dfrac{\partial\overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2U}{\partial x_p\partial x_j}\frac{\partial\overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2U}{\partial x_p\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\overline{\lambda}}_q}{\partial v_t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2U}{\partial x_p\partial\mu_k}\frac{\partial\overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t}=-\dfrac{\partial^2U}{\partial x_p\partial v_t}\\
\qquad\qquad p=\overline{1,n}\,,\\
\dfrac{\partial^2U}{\partial\lambda_i\,\partial\rho}\dfrac{\partial\overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2U}{\partial\lambda_i\partial x_j}\frac{\partial\overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2U}{\partial\lambda_i\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\overline{\lambda}}_q}{\partial v_t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2U}{\partial\lambda_i\partial\mu_k}\frac{\partial\overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t}=-\dfrac{\partial^2U}{\partial\lambda_i\partial v_t}\\
\qquad\qquad i=\overline{1,m}\,,\\
\dfrac{\partial^2U}{\partial\mu_s\,\partial\rho}\dfrac{\partial\overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2U}{\partial\mu_s\partial x_j}\frac{\partial\overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t}+\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial^2U}{\partial\mu_s\partial\lambda_q}\frac{\partial\overline{\overline{\lambda}}_q}{\partial v_t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2U}{\partial\mu_s\partial\mu_k}\frac{\partial\overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t}=-\dfrac{\partial^2U}{\partial\mu_s\partial v_t}\\
\qquad\qquad s=\overline{1,N}\,,
\end{array}\right.\qquad(3.4.12)$$

Рассмотрим, наконец, задачу *третьего уровня*. В качестве гладкой аппроксимации зависимости ρ_v^{**} выберем функцию

$$\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, V) = \mathbb{U}\Big(\tau,\, \overline{\overline{\rho}}(\tau, V),\, \overline{\overline{X}}(\tau, V),\, \overline{\overline{\Lambda}}(\tau, V),\, \overline{\overline{\mu}}(\tau, V),\, V\Big)\,. \qquad (3.4.13)$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции, частная производная от $\overline{\overline{\mathbb{U}}}$ по $v_t \quad t = \overline{1, K}$ имеет вид

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathbb{U}}}}{\partial v_t} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial v_t} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \rho}\frac{\partial \overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_i}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_k}\frac{\partial \overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t}\,.$$

Все частные производные от функции $\overline{\overline{\mathbb{U}}}$ в этой формуле вычисляются в точке $\{\, \tau, \overline{\overline{\rho}}, \overline{\overline{X}}, \overline{\overline{\Lambda}}, \overline{\overline{\mu}}, V \,\}$. Поэтому в силу (3.4.11) данное выражение упрощается до

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathbb{U}}}}{\partial v_t} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial v_t}\Big(\tau, \overline{\overline{\rho}}(\tau, V),\, \overline{\overline{X}}(\tau, V),\, \overline{\overline{\Lambda}}(\tau, V),\, \overline{\overline{\mu}}(\tau, V),\, V\Big) \qquad \forall t = \overline{1, K}\,. \qquad (3.4.14)$$

Таким образом, для решения задачи третьего уровня любым методом *первого* порядка достаточно уметь находить лишь решения систем (3.4.7) и (3.4.11) $\forall V \in \Upsilon$. Погрешность аппроксимации зависит от величины параметра τ и стремится к нулю при $\tau \to 0$.

В случае использования методов *второго* порядка, помимо решений систем (3.4.7) и (3.4.11), потребуются также и значения частных производных аппроксимирующей функции (3.4.13) второго порядка.

Непосредственное дифференцирование формулы (3.4.14) с учетом (3.4.11) дает

$$\frac{\partial^2 \overline{\overline{\mathbb{U}}}}{\partial v_s \partial v_t} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial v_t} + \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \rho} \frac{\partial \overline{\overline{\rho}}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial x_j} \frac{\partial \overline{\overline{x}}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \lambda_i} \frac{\partial \overline{\overline{\lambda}}_i}{\partial v_t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \mu_k} \frac{\partial \overline{\overline{\mu}}_k}{\partial v_t} \qquad \forall s,t = \overline{1,K} \; . \tag{3.4.15}$$

Откуда следует, что в случае применения методов второго порядка для вычисления матрицы Гессе $\nabla^2 \overline{\overline{\mathbb{U}}}$ в каждой пробной точке $V \in \Upsilon$ придется также решать и линейную систему (3.4.12).

Пример трехуровневой задачи для многокритериальной модели

Использование метода функций обратных связей для решения трехуровневой оптимизационной параметрической задачи рассмотрим на конкретном примере.

С одной стороны, этот пример прост и легко проверяем. С другой стороны, он в полной мере иллюстрирует особенности решения оптимизационных задач для многокритериальных математических моделей с параметрами.

Пусть подлежащие максимизации по $X \in E^3$ с $V \in E^2$ целевые функции модели суть

$$F_1(X,V) = x_1\,, \qquad F_2(X,V) = x_2\,, \qquad F_3(X,V) = x_3\,.$$

При этом множество допустимых состояний задается системой неравенств

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \qquad \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq 1\,,$$

а множество Υ пусть определено как

$$1 \leq v_1 \leq B, \qquad 1 \leq v_2 \leq B, \qquad 2v_1 + v_2 \geq C\,,$$

где $A = 11,\ B = 5$ и $C = 7$.

В рассматриваемой модели $K = 3$ и задачи *первого уровня* будут иметь вид:

$$\forall k = 1,2,3 \quad \textit{максимизировать по } x \in E^3 \qquad F_{(k)} = x_{(k)k}$$

при условиях

$$x_{(k)1} \geq 0,\ x_{(k)2} \geq 0,\ x_{(k)3} \geq 0, \quad \frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} \leq 1\ .$$

Для решения этих задач используем функцию обратных связей вида

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) \qquad \text{с} \qquad R(\tau, s) = \frac{\tau}{2}\left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2}\right).$$

Тогда вспомогательные функции (3.4.6) для них записываются как

$$U_{(k)}(X, V) =$$

$$= x_{(k)k} - \lambda_{(k)}\left(\frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1\right) - \qquad (3.4.16)$$

$$-R(\tau, x_{(k)1}) - R(\tau, x_{(k)2}) - R(\tau, x_{(k)3}) + R(\tau, \lambda_{(k)})\ .$$

Соответственно, условия стационарности $U_{(k)}(X,V)$ при фиксированном $V \in \Upsilon$ будут

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta_{k1} - \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}}{v_1} - Q(\tau, \overline{x}_{(k)1}) &=& 0\,, \\ \delta_{k2} - \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}}{v_2} - Q(\tau, \overline{x}_{(k)2}) &=& 0\,, \\ \delta_{k3} - \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}}{A - v_1 - v_2} - Q(\tau, \overline{x}_{(k)3}) &=& 0\,, \\ \dfrac{\overline{x}_{(k)1}}{v_1} + \dfrac{\overline{x}_{(k)2}}{v_2} + \dfrac{\overline{x}_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1 - Q(\tau, \overline{\lambda}_{(k)}\ ) &=& 0\,. \end{array}\right. \tag{3.4.17}$$

В свою очередь, решения системы (3.4.17) позволяют находить значения функций (3.4.8), которые в рассматриваемом примере определяются следующими из (3.4.16) и (3.4.17), формулами

$$\begin{aligned} \overline{U}_{(k)}(\tau,V) = x_{(k)k}(\tau,V) - \\ -R(\tau,\overline{x}_{(k)1}(\tau,V)) - R(\tau,\overline{x}_{(k)2}(\tau,V)) - R(\tau,\overline{x}_{(k)3}(\tau,V)) + \\ +R(\tau,\overline{\lambda}_{(k)}(\tau,V)) - \overline{\lambda}_{(k)}(\tau,V)\, Q(\tau,\overline{\lambda}_{(k)}(\tau,V))\,. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Компоненты их градиентов по V будут равны $\forall k = \overline{1,K}$.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \overline{U}_{(k)}}{\partial v_1} &=& \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}\overline{x}_{(k)1}}{v_1^2} - \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}\overline{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2}\,, \\ \dfrac{\partial \overline{U}_{(k)}}{\partial v_2} &=& \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}\overline{x}_{(k)2}}{v_2^2} - \dfrac{\overline{\lambda}_{(k)}\overline{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2}\,. \end{array} \tag{3.4.19}$$

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи *второго уровня* (3.4.4).

В формулировке этой задачи вместо зависимостей $F^*_{(k)v}$ используем их сглаженные аппроксимации $\overline{U}_{(k)}(\tau, v_1, v_2) \quad \forall k = 1, 2, 3$.

Тогда задача второго уровня для рассматриваемой модели примет вид:

$$
\begin{aligned}
&\textit{максимизировать} \quad -\rho \\
&\textit{при условиях} \;\; \rho \geq 0, \quad x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0 \;, \\
&\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq 1 \;, \qquad (3.4.20) \\
&\overline{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - x_1 - \rho \leq 0 \;, \\
&\overline{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - x_2 - \rho \leq 0 \;, \\
&\overline{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - x_3 - \rho \leq 0 \;.
\end{aligned}
$$

Вспомогательная функция задачи второго уровня будет

$$\mathbb{U}\big(\tau,\rho,X,\Lambda,\mu\big) =$$

$$= -\rho - \lambda\left(\frac{x_1}{v_1}+\frac{x_2}{v_2}+\frac{x_3}{A-v_1-v_2}-1\right)-$$

$$-\mu_1\Big(\overline{U}_{(1)}(\tau,v_1,v_2)-x_1-\rho\Big)-$$

$$-\mu_2\Big(\overline{U}_{(2)}(\tau,v_1,v_2)-x_2-\rho\Big)-$$

$$-\mu_3\Big(\overline{U}_{(3)}(\tau,v_1,v_2)-x_3-\rho\Big)-$$

$$-R(\tau,\rho)-R(\tau,x_1)-R(\tau,x_2)-R(\tau,x_3)+R(\tau,\lambda)+$$

$$+R(\tau,\mu_1)+R(\tau,\mu_2)+R(\tau,\mu_3)\ ,$$

где λ и μ_1, μ_2, μ_3 суть множители Лагранжа четырех последних ограничений в (3.4.20).

Выпишем теперь условия, которые будут определять стационарные точки вспомогательной функции в задаче второго уровня (3.4.20).

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial \rho} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_1} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_2} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_3} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial \lambda} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_1} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_2} &=& 0\,,\\
\dfrac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_3} &=& 0
\end{array}\right.
\quad \text{или} \quad
\left\{\begin{array}{rcl}
-1+\overline{\overline{\mu}}_1+\overline{\overline{\mu}}_2+\overline{\overline{\mu}}_3-Q(\tau,\overline{\overline{\rho}}) &=& 0\,,\\
-\dfrac{\overline{\overline{\lambda}}}{v_1}+\overline{\overline{\mu}}_1-Q(\tau,\overline{\overline{x}}_1) &=& 0\,,\\
-\dfrac{\overline{\overline{\lambda}}}{v_2}+\overline{\overline{\mu}}_2-Q(\tau,\overline{\overline{x}}_2) &=& 0\,,\\
-\dfrac{\overline{\overline{\lambda}}}{A-v_1-v_2}+\overline{\overline{\mu}}_3-Q(\tau,\overline{\overline{x}}_3) &=& 0\,,\\
\dfrac{\overline{\overline{x}}_1}{v_1}+\dfrac{\overline{\overline{x}}_2}{v_2}+\dfrac{\overline{\overline{x}}_3}{A-v_1-v_2}-1-Q(\tau,\overline{\overline{\lambda}}) &=& 0\,,\\
\overline{U}_{(1)}(\tau,v_1,v_2)-\overline{\overline{x}}_1-\overline{\overline{\rho}}-Q(\tau,\overline{\overline{\mu}}_1) &=& 0\,,\\
\overline{U}_{(2)}(\tau,v_1,v_2)-\overline{\overline{x}}_2-\overline{\overline{\rho}}-Q(\tau,\overline{\overline{\mu}}_2) &=& 0\,,\\
\overline{U}_{(3)}(\tau,v_1,v_2)-\overline{\overline{x}}_3-\overline{\overline{\rho}}-Q(\tau,\overline{\overline{\mu}}_3) &=& 0\,.
\end{array}\right.
\tag{3.4.21}
$$

Получив решения системы (3.4.21), можно построить сглаживающую аппроксимацию для зависимости ρ_v^{**}, которая используется в постановке задачи третьего уровня. В качестве такой аппроксимации возьмем функцию

$$\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, V) = \mathbb{U}\Big(\tau, \overline{\overline{\rho}}(\tau, V), \overline{\overline{x}}(\tau, V), \overline{\overline{\lambda}}(\tau, V), \overline{\overline{\mu}}(\tau, V)\Big),$$

компоненты градиента которой по V согласно (3.4.14) равны соответственно

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathbb{U}}}}{\partial v_1} = \frac{\overline{\overline{\lambda}}\,\overline{\overline{x}}_1}{v_1^2} - \frac{\overline{\overline{\lambda}}\,\overline{\overline{x}}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \overline{\overline{\mu}}_1 \frac{\partial \overline{U}_{(1)}}{\partial v_1} - \overline{\overline{\mu}}_2 \frac{\partial \overline{U}_{(2)}}{\partial v_1} - \overline{\overline{\mu}}_3 \frac{\partial \overline{U}_{(3)}}{\partial v_1},$$

и

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathbb{U}}}}{\partial v_2} = \frac{\overline{\overline{\lambda}}\,\overline{\overline{x}}_2}{v_2^2} - \frac{\overline{\overline{\lambda}}\,\overline{\overline{x}}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \overline{\overline{\mu}}_1 \frac{\partial \overline{U}_{(1)}}{\partial v_2} - \overline{\overline{\mu}}_2 \frac{\partial \overline{U}_{(2)}}{\partial v_2} - \overline{\overline{\mu}}_3 \frac{\partial \overline{U}_{(3)}}{\partial v_2}, \tag{3.4.22}$$

где значения частных производных в правых частях определяются формулами (3.4.19).

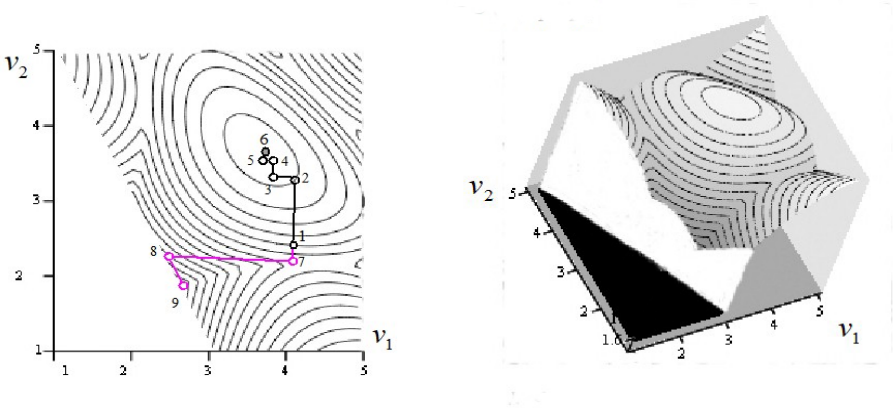

Рис. 3.4.1. Система изолиний и 3d-график функции $-\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, v_1, v_2)$

Для большей наглядности рассмотрим легко проверяемый вариант задачи третьего уровня:

найти локальные экстремальные значения зависимости ρ_v^{**} *в случае, когда множество* $\Upsilon \subset E^2$ *определяется системой неравенств*

$$\begin{cases} 1 \le v_1 \le 5\,, \\ 1 \le v_2 \le 5\,, \\ 2v_1 + v_2 \ge 7\,. \end{cases}$$

Геометрически эта задача допускает такую интерпретацию: требуется найти значения параметров v_1 и v_2, *оптимизирующих* (по величине рассогласования критериев) *форму* сглаженной аппроксимации множества Парето рассматриваемой многокритериальной модели.

Система изолиний и пространственный график аппроксимации зависимости ρ_v^{**}, то есть функции $-\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, v_1, v_2)$, показаны на рис. 3.4.1.

Для поиска максимума в задаче третьего уровня применен метод *наискорейшего подъема*. В качестве направляющего вектора w использовался *нормированный градиент* функции $-\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, v_1, v_2)$. Оценка величины шага определялась по значениям этой функции вдоль w.

Основные количественные характеристики для нескольких начальных итераций процесса решения при $\tau = 0.01$ приведены в табл. 3.4.1a—3.4.1b. Точное решение задачи третьего уровня (поиска локального максимума) (точка 6 на рис. 3.4.1) имеет вид:

$$v_1^{**} = \frac{11}{3}\,, \quad v_2^{**} = \frac{11}{3}\,, \quad \rho_{v^{**}}^{**} = \frac{22}{9}\,.$$

Т а б л и ц а 3,4.1a.

Точка на рис.4	v_1	v_2	$-\overline{\overline{U}}$
1	4.000000000	2.500000000	2.292876919
2	4.108927815	3.418563950	2.427442369
3	3.751137224	3.458387226	2.440214361
4	3.766947377	3.609311384	2.443407623
5	3.686757173	3.617925071	2.444096417
Точное решение	3.666666667	3.666666667	2.444444444

Локальный минимум в задаче третьего уровня определялся методом *проекции антиградиента*. Количественные характеристики первых трех шагов соответствующего итерационного процесса при $\tau = 0.01$ приведены в табл. 3.4.2a—3.4.2b.

Точное решение этой задачи (точка 9 на рис. 3.4.1) имеет вид:

$$v_1^{**} = \frac{1+\sqrt{141}}{5}, \quad v_2^{**} = \frac{33-2\sqrt{141}}{5}, \quad \rho_{v^{**}}^{**} = \frac{33-2\sqrt{141}}{5}.$$

Для демонстрации сглаживающего свойства метода функций обратных связей на рис. 3.4.2 приведены графики функции

$$\overline{\Phi}(\tau, v_1) = -\overline{\overline{\mathbb{U}}}(\tau, v_1, 7 - 2v_1,)$$

при $\tau = 0.05$, 0.025, 0.01, а также при $\tau \to +0$.

Т а б л и ц а 3.4.1b.

Точка на рис.4	Норма град.	w_1	w_2	Шаг
1	0.292812466	0.117759800	0.993042109	0.925000000
2	0.070259924	−0.993862751	0.110620212	0.360000000
3	0.041937320	0.104185521	0.994557880	0.151750000
4	0.017053825	−0.994280382	0.106801322	0.080651500
5	0.009512746	...	...	...

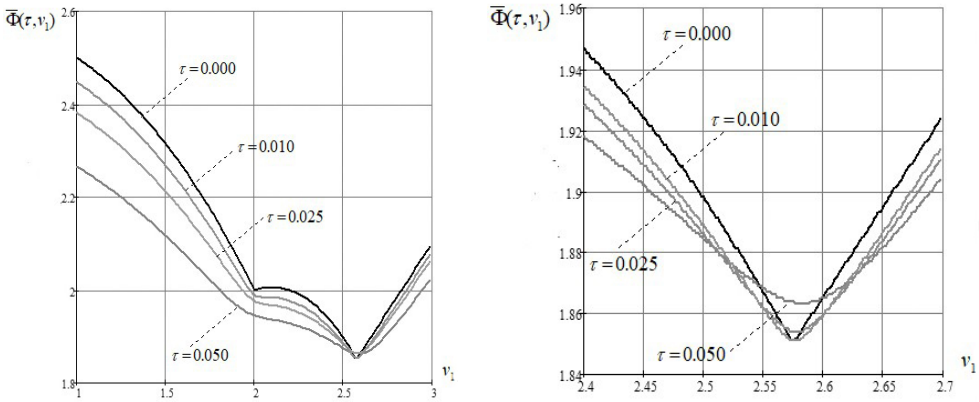

Рис. 3.4.2. Графики функции $\overline{\Phi}(\tau, v_1)$

Т а б л и ц а 3.4.2a.

Точка на рис.4	v_1	v_2	$-\overline{\overline{U}}$
1	4.000000000	2.500000000	2.292876919
7	3.962274029	2.181865306	2.181828016
8	2.311246750	2.377506503	1.976736712
9	2.574871109	1.850257785	1.850234349
Точное решение	2.574868417	1.850263165	1.850263165

Т а б л и ц а 3.4.2b.

Точка на рис.4	Норма град.	w_1	w_2	Шаг
1	0.292812466	−0.117759800	−0.993042109	0.320363750
7	0.085751139	−0.993052354	0.117673374	1.662578285
8	0.433886194	0.447213595	−0.894427191	0.589481987
9	...	...	...	...