

Верс. 03фев2026г.

Линейная экстраполяция в методе функций обратных связей

Из теоремы 2.1.2 следует, что для достаточно малых положительных значениях τ метод функций обратных связей локально сходится к одному из решений задачи (1.1.1) при $\tau \rightarrow +0$. Иначе говоря, погрешность аппроксимации снижается при уменьшении абсолютной величины τ .

Однако, для получения лучшего качества аппроксимации непосредственное уменьшение модуля инструментального параметра τ не всегда приводит к желаемому результату. Причиной этого оказывается ухудшение обусловленности системы (2.1.3) при $\tau \rightarrow +0$.

Рассмотрим альтернативный алгоритм уменьшения погрешности метода функций обратных связей, лишенный этого недостатка.

Непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\bar{X}(\tau)$ и $\bar{\Lambda}(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений (2.1.3) на стационарной траектории задачи (1.1.1). Тогда по теореме о неявных функциях [17] для них на интервале $\tau \in (0, \tau_0)$ справедливы формулы Тейлора первого порядка

$$\bar{X}(\tau + \Delta) = \bar{X}(\tau) + \frac{d\bar{X}}{d\tau} \Delta + o(\Delta) \quad \text{и} \quad \bar{\Lambda}(\tau + \Delta) = \bar{\Lambda}(\tau) + \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \Delta + o(\Delta).$$

Если в этих равенствах перейти к пределу при $\Delta \rightarrow -\tau + 0$ (сверху), то

$$X^* = \bar{X}(\tau) - \frac{d\bar{X}}{d\tau} \tau + o(\tau) \quad \text{и} \quad \Lambda^* = \bar{\Lambda}(\tau) - \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \tau + o(\tau).$$

Откуда получаются уточненные оценки для аппроксимации решений X^* и Λ^* вида:

$$X^+ = \bar{X}(\tau) - \frac{d\bar{X}}{d\tau} \tau \quad \text{и} \quad \Lambda^+ = \bar{\Lambda}(\tau) - \frac{d\bar{\Lambda}}{d\tau} \tau. \quad (2.4.1)$$

Значения компонент производных в (2.4.1) находятся (согласно теореме о системе неявных функций) из системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \tau} \quad p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau} = -\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \tau} \quad q = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

которая получается дифференцированием системы нелинейных уравнений (2.1.3) по параметру τ . Система (2.4.2) имеет невырожденную основную матрицу (см. теорему 2.1.3) и структуру, аналогичную системе уравнений (2.3.7) для экзогенного векторного параметра V .

Из курса математического анализа известно, что, если коэффициент τ достаточно мал по модулю, то в силу свойств функции $o(\tau)$, норма разности векторов $\{X^+, \Lambda^+\}$ и $\{X^*, \Lambda^*\}$ будет меньше, чем норма разности $\{\bar{X}, \bar{\Lambda}\}$ и $\{X^*, \Lambda^*\}$.

Однако может оказаться, что использование формул (2.4.1) все же не дает приемлемого уровня погрешности. Тогда возникает вопрос о возможности и целесообразности *итеративного* (то есть неоднократного последовательного) применения этих формул.

Формальное применять формулы (2.4.1) для дальнейшего повышения точности нельзя. Действительно, точка $\{X^+, \lambda^+\}$ уже не является решением системы (2.1.3) и для нее не будет верна теорема о неявных функциях.

То есть в общем случае эта точка не будет принадлежать стационарной траектории (см. рис. 2.4.1А).

Сделать возможным использование равенств (2.4.1) для итерационного уточнения решения задачи (1.1.1) в методе функций обратных связей позволяет следующий прием.

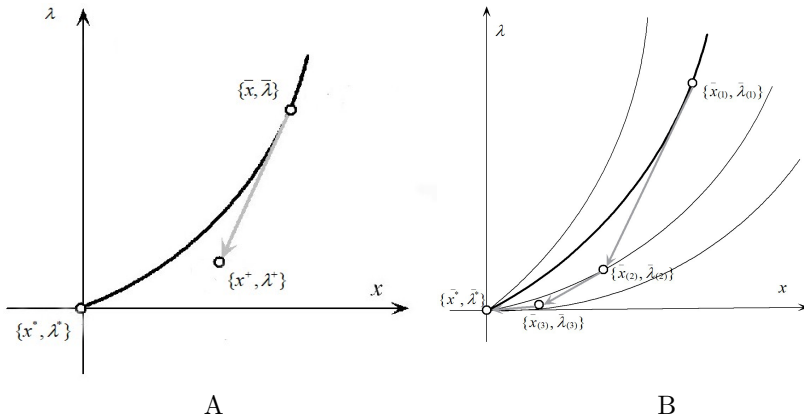


Рис. 2.4.1. Стационарные траектории в последовательной линейной экстраполяции для метода функций обратных связей

Пусть в постановке задачи (1.1.1) условия неотрицательности компонент вектора X выделены в отдельную, от остальных неравенств $f_i(X) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}$, группу. Тогда

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (2.4.3)$$

Введем новый инструментальный параметр $\vec{\tau}$ с координатным представлением

$$\| \tau_{x1} \tau_{x2} \dots \tau_{xn} \tau_{\lambda1} \tau_{\lambda2} \dots \tau_{\lambda m} \|^\top,$$

компоненты которого суть положительные константы. Затем в формуле (2.4.3) заменим в каждом слагаемом с функцией R скалярный параметр τ на соответствующую компоненту вектора $\vec{\tau}$.

При такой замене мы получим семейство вспомогательных функций

$$U(\vec{\tau}, X, \Lambda) = L(X, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau_{x_j}, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau_{\lambda_i}, \lambda_i). \quad (2.4.4)$$

Заметим, что

- во-первых, функция (2.4.4) совпадает с (2.4.3), если все компоненты вектора $\vec{\tau}$ равны τ ,
- во-вторых, основные свойства и стационарные точки у всех функций (2.4.4) одинаковые.

Откуда следует, что семейство непрерывно дифференцируемых вспомогательных функций (2.4.4) порождает пучок гладких стационарных траекторий, проходящих через точку $\{X^*, \Lambda^*\}$ (см. рис. 2.4.1в)).

Суть предлагаемого приема заключается в подборе значений компонент вектора $\vec{\tau}$, которые обеспечивают попадание уточненной аппроксимации решения $\{X^+, \Lambda^+\}$ на некоторую *новую* траекторию, ведущую в $\{X^*, \Lambda^*\}$. Для этой новой траектории теорема о неявных функциях в точке $\{X^+, \Lambda^+\}$ выполняется. Поэтому повторное и неоднократное использование формул аналогичных (2.4.1) уже возможно.

Графическая интерпретация описанной схемы приведена на рис. 2.4.1в. Поскольку итоговый путь к решению оказывается *кусочно-прямой* линией, то построенную процедуру можно назвать *последовательной линейной экстраполяцией*.

Приведем формальное описание метода линейной экстраполяции.

Процедура итеративного улучшения оценок для X^* и Λ^* выполняется по следующим из (2.4.1) формулам $\forall t = 0, 1, 2, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{j(t+1)} = \bar{x}_{j(t)} - \tau_{xj(t)} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{xj(t)}} \quad j = \overline{1, n}, \\ \bar{\lambda}_{i(t+1)} = \bar{\lambda}_{i(t)} - \tau_{\lambda i(t)} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda i(t)}} \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

Значения производных в (2.4.5) вычисляются в точках $\{\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}\}$ по формулам аналогичным (2.4.2).

Выбор значений $\{\tau_{x1} \tau_{x2} \dots \tau_{xn} \tau_{\lambda 1} \tau_{\lambda 2} \dots \tau_{\lambda m}\}$ в формулах (2.4.5) делается $\forall t = 0, 1, 2, \dots$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}_x \hat{U}(\vec{\tau}_{(t+1)}, \bar{X}_{(t+1)}, \bar{\Lambda}_{(t+1)}) = o, \\ \text{grad}_\lambda \hat{U}(\vec{\tau}_{(t+1)}, \bar{X}_{(t+1)}, \bar{\Lambda}_{(t+1)}) = o. \end{array} \right. \quad (2.4.6)$$

Отметим, что в силу (2.1.1) этот пересчет сводится к решению $n+m$ линейных уравнений с одним неизвестным каждое, имеющих вид

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{xj(t+1)} \Psi(\bar{x}_{j(t)}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{\lambda i(t+1)} \Psi(\bar{\lambda}_{i(t)}) = 0 & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}) - \tau_{xj(t+1)} \Psi(\bar{x}_{j(t)}) = 0 & j = \overline{1, n}, \\ f_i(\bar{X}_{(t)}) - \tau_{\lambda i(t+1)} \Psi(\bar{\lambda}_{i(t)}) = 0 & i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Значения производных в (2.4.3) для каждой итерации t находятся из (аналогичной (2.4.2)) системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{x_j(t)}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda_i(t)}} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x_p \partial \tau_{x_p(t)}} \quad p = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial x_j} \frac{d\bar{x}_j}{d\tau_{x_j(t)}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \lambda_i} \frac{d\bar{\lambda}_i}{d\tau_{\lambda_i(t)}} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_q \partial \tau_{\lambda_q(t)}} \quad q = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (2.4.8)$$

Итеративное применение формул (2.4.5)–(2.4.8) является локально сходящейся процедурой.

Эта сходимость следует из свойств тейлоровской аппроксимации и очевидной сжимаемости, определяемого формулами (2.4.5)–(2.4.8), оператора, при стремящейся к нулю норме вектора $\vec{\tau}$.

Практическое применение процедуры последовательной линейной экстраполяции иллюстрирует

Пример 2.4.1.

$$\begin{array}{ll} \text{Максимизировать} & F = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 \\ \text{при условиях} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ и } x_1 + 2x_2 \leq 3, \quad x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{array}$$

Решение.

Пусть функция обратных связей $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right)$, тогда соответствующая ей функция $R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right)$.

В данном примере вместо скалярного параметра τ используем четырехмерный вектор $\vec{\tau}$ с координатным столбцом $\| \tau_{x_1} \tau_{x_2} \tau_{\lambda_1} \tau_{\lambda_2} \|^T$.

Вспомогательная U -функция имеет вид

$$\begin{aligned} U(\tau, x, \lambda) = & -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - \lambda_1(-3 + x_1 + 2x_2) - \lambda_2(x_1^2 - x_2) - \\ & - R(\tau_{x_1}, x_1) - R(\tau_{x_2}, x_2) + R(\tau_{\lambda_1}, \lambda_1) + R(\tau_{\lambda_2}, \lambda_2). \end{aligned}$$

Тогда условия стационарности U -функции для решаемой задачи, то есть система уравнений (2.1.4) будет

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 + \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right), \\ \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right), \\ -2(\bar{x}_1 - 1) - \bar{\lambda}_1 - 2\bar{x}_1\bar{\lambda}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ -2\bar{x}_2 - 2\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = \frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right). \end{array} \right. \quad (2.4.9)$$

За начальное приближение в процедуре последовательной линейной экстраполяции примем решение системы (2.4.9) с $\tau = 0.01$, приведенное в таблицах 2.4.1a–2.4.1b.

Используем обозначения

$$f_1(x) = -3 + x_1 + 2x_2,$$

$$f_2(x) = x_1^2 - x_2,$$

$$L(x, \lambda) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - \lambda_1(-3 + x_1 + 2x_2) - \lambda_2(x_1^2 - x_2).$$

Таблицы 2.4.1а–2.4.1б.

Решения системы (2.4.9) при $\tau = 0.01$.

τ	$\bar{x}_1(\tau)$	$\bar{x}_2(\tau)$	$\bar{\lambda}_1(\tau)$	$\bar{\lambda}_2(\tau)$	$F(\bar{x}(\tau))$
10^{-2}	0.59002481	0.35181724	$2.930 \cdot 10^{-3}$	0.69704208	-0.51620893

$f_1(\bar{x}(\tau))$	$f_2(\bar{x}(\tau))$	$L(\bar{x}, \bar{\lambda})$	$U(\bar{x}, \bar{\lambda})$
-1.70634071	$-3.688 \cdot 10^{-3}$	-0.50863832	-0.48549662

Последовательное уточнение значений прямых и двойственных переменных будем выполнять по формулам (2.4.5) с использованием решений системы линейных уравнений (2.4.8), основная матрица которой в решаемом примере имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{x}_1^2} \right) - 2 - 2\bar{\lambda}_2 & 0 & -1 & -2\bar{x}_1 \\ 0 & -\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{x}_2^2} \right) - 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) & 0 \\ -2x_1 & 1 & 0 & \frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_2^2} \right) \end{array} \right\|,$$

в то время как столбец правых частей этой системы будет

$$\left\| \begin{array}{cccc} -\frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right) & -\frac{\tau}{2} \left(\bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \right) & \frac{\tau}{2} \left(\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \right) \end{array} \right\|^T.$$

Пусть в процедуре (2.4.5) уточненные значения переменных на итерации с номером $t - 1 \quad \forall t = 1, 2, \dots$ равны соответственно

$$\bar{x}_{1(t)}, \bar{x}_{2(t)} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_{1(t)}, \bar{\lambda}_{2(t)}.$$

Тогда значения компонент $\vec{\tau}_{(t)}$, гарантирующих принадлежность точки $\{\bar{X}_{(t)}, \bar{\Lambda}_{(t)}\}$ некоторой другой стационарной траектории, в силу (2.4.7) будут определяться равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{x1(t)} = \frac{2\left(-2(\bar{x}_{1(t)} - 1) - \bar{\lambda}_{1(t)} - 2\bar{x}_{1(t)}\bar{\lambda}_{2(t)}\right)}{\bar{x}_{1(t)} - \frac{1}{\bar{x}_{1(t)}}}, \\ \tau_{x2(t)} = \frac{2\left(-2\bar{x}_{2(t)} - 2\bar{\lambda}_{1(t)} + \bar{\lambda}_{2(t)}\right)}{\bar{x}_{2(t)} - \frac{1}{\bar{x}_{2(t)}}}, \\ \tau_{\lambda1(t)} = \frac{2\left(-3 + \bar{x}_{1(t)} + 2\bar{x}_{2(t)}\right)}{\bar{\lambda}_{1(t)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{1(t)}}}, \\ \tau_{\lambda2(t)} = \frac{2\left(\bar{x}_{1(t)}^2 - \bar{x}_{2(t)}\right)}{\bar{\lambda}_{2(t)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{2(t)}}}. \end{array} \right.$$

Величина получаемой погрешности на каждом шаге экстраполяции может быть оценена разными способами.

Во-первых, по значениям двойственных переменных λ_1 и λ_2 , точные значения которых в данной задаче находятся аналитически. Они равны соответственно 0 и λ_2^* , где λ_2^* есть положительный корень уравнения

$$\lambda_2(\lambda_2 + 1)^2 - 2 = 0.$$

Этот корень равен (по формуле Кардано)

$$\lambda_2^* = \frac{\left(\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}} - 1\right)^2}{3\sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}}} \approx 0.69562077.$$

Во-вторых, это можно сделать, сравнив абсолютные величины целевой функции F и функции Лагранжа L .

Результаты расчетов выполненных в процессе решения примера 2.4.1 приведены в табл. 2.4.2, 2.4.3 и 2.4.4.

Т а б л и ц а 2.4.2

t	$\bar{x}_1(t)$	$\bar{x}_2(t)$	F	$\bar{\lambda}_1(t)$	$\bar{\lambda}_2(t)$
0	0.590024813	0.351817238	-0.291855023	0.002930222	0.697042081
1	0.589788382	0.347873253	-0.289289372	$-1.390 \cdot 10^{-5}$	0.695539663
2	0.589754522	0.347810387	-0.289289372	$1.294 \cdot 10^{-9}$	0.695620736
3	0.589754512	0.347810385	-0.289273424	0	0.695620770

Т а б л и ц а 2.4.3

t	f_1	f_2	L	$L - F$	U
0	-1.706340711	-0.003687958	-0.284284404	0.007570619	-0.261142713
1	-1.714465112	$-2.291 \cdot 10^{-5}$	-0.289297265	$-7.893 \cdot 10^{-6}$	-0.289593289
2	-1.714624703	$8.824 \cdot 10^{-9}$	-0.289273422	$-3.920 \cdot 10^{-9}$	-0.289273422
3	-1.714624718	$-1.11 \cdot 10^{-15}$	-0.289273424	0	-0.290232652

Т а б л и ц а 2.4.4

t	$\tau_{x1}(t)$	$\tau_{x2}(t)$	$\tau_{\lambda1}(t)$	$\tau_{\lambda2}(t)$	$\bar{\lambda}_2(t) - \lambda_2^*$
0	0.01	0.01	0.01	0.01	0.001421311
1	$9.565 \cdot 10^{-6}$	0.000141717	$-4.767 \cdot 10^{-5}$	$6.176 \cdot 10^{-5}$	$-8.111 \cdot 10^{-5}$
2	$-8.794 \cdot 10^{-9}$	$3.265 \cdot 10^{-8}$	$4.437 \cdot 10^{-9}$	$-2.379 \cdot 10^{-8}$	$-3.373 \cdot 10^{-8}$
3	$-1.41 \cdot 10^{-15}$	0	0	$2.99 \cdot 10^{-15}$	$-4.40 \cdot 10^{-10}$