

Верс. 19фев2026г.

## Задачи для многокритериальных моделей

Покажем, что метод функций обратных связей применим при решении оптимизационных задач вида (2.3.1) для параметрических *многокритериальных* математических моделей.

Как известно, в математическом моделировании при формировании критериев оценки состояний моделируемого объекта нередко возникает не одна, а некоторый набор (например, состоящий из  $T \geq 2$ ) независимых друг от друга целевых функций.

В этом случае *многокритериальной моделью* будем называть совокупность подлежащих максимизации по  $X \in E^n$  функций

$$F_k(X, V) \quad k = \overline{1, T}, \quad (3.4.1)$$

при условиях

$$f_i(X, V) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4.2)$$

где  $V \in \Upsilon \subseteq E^K$  вектор экзогенных параметров.

Будем также считать, что все функции  $F_k(X, V)$  и  $f_i(X, V)$  дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

При принятии управленческих решений с помощью многокритериальных моделей могут возникать различные типы задач оптимизации.

Например очевидно, что одновременное достижение всеми целевыми функциями (3.4.1) экстремумов в некоторой из точек множества, определяемого системой неравенств (3.4.2), в общем случае невозможно. Поэтому на практике часто используются постановки задач, допустимые решения которых являются некоторым *компромиссом* для критериев (3.4.1).

Основой для построения компромисса могут служить решения однокритериальных задач вида

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать по } X \in E^n & \text{функцию } F_k(X, V) \\ \text{при условиях:} & f_i(X, V) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \quad (3.4.3)$$

Решение каждой из этих задач (т.е. вектор  $X_{(k)v}^*$ , а также значение  $F_{(k)v}^* = F_k(X_{(k)v}^*, V)$   $k = \overline{1, T}$  есть наилучшее по  $k$ -му критерию допустимое состояние модели (3.4.1)–(3.4.2) при фиксированном векторе параметров  $V \in \Upsilon$ .

Рассмотрим случай, когда задача определения компромиссного состояния заключается в поиске допустимой точки  $X_v^{**}$ , в которой достигается экстремум некоторой *количественной оценки качества компромисса*.

Такой точкой, например, может служить вектор  $X$ , удовлетворяющий ограничениям (3.4.2) и доставляющий *минимум* максимальной (по  $k = \overline{1, T}$ ) из разностей  $F_{(k)v}^* - F_k(X, V)$ . То есть  $X$  есть решение задачи

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{X \in E^n; \rho \geq 0\} \text{ функцию } -\rho \\ & \text{при условиях:} \quad f_i(X, V) \leq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4.4) \\ & \quad \quad \quad F_{(k)v}^* - F_k(X, V) - \rho \leq 0 \quad k = \overline{1, T}. \end{aligned}$$

Точнее говоря, решение задачи (3.4.4) образуют величина  $\rho_v^{**}$  и вектор  $X_v^{**}$ . Они являются некоторыми зависимостями от вектора параметров  $V$ . Эти зависимости обладают отмеченными в § 2.3 свойствами, которые осложняют решение задач, в условии которых они используются.

Отметим также, что значение  $\rho_v^{**}$  может рассматриваться как оценка минимума возможной *рассогласованности* целевых функций в многокритериальной модели (3.4.1)—(3.4.2).

Далее для краткости задачи (3.4.3) будем называть задачами *первого уровня*, а задачу (3.4.4) задачей *второго уровня*.

Другими примерами задач второго уровня, в постановке которых используются решения задач (3.4.3), могут также служить известные (см., например, [15]) в практике математического моделирования: алгоритмы *свертки целевых функций* (3.4.1), методы *поиска равновесия по Парето* и другие вычислительные схемы.

Для полноты картины, отметим, что для модели (3.4.1)—(3.4.2) возможна постановка оптимизационной задач *третьего уровня*, например

$$\text{найти экстремум } \rho_v^{**} \text{ по } V \in \Upsilon \subseteq E^K. \quad (3.4.5)$$

Решением этой задачи будут являться вектор  $V^{***} \in \Upsilon$  и число  $\rho^{***}$ , равное значению  $\rho_v^{**}$  в точке  $V^{***}$ .

Одной из причин вычислительных трудностей при решении задачи (3.4.5) является зависимость  $\rho_v^{**}$  в постановке этой задачи.

Данную проблему можно попытаться решить, применив метод функций обратных связей. То есть построив функцию  $\bar{\rho}(\tau, V)$ , являющуюся гладкой аппроксимацией зависимости  $\rho_v^{**}$ .

Действительно, пусть при поиске локального решения задачи (3.4.5) применяется некоторый метод второго порядка. Значит, для его реализации достаточно иметь значения  $\bar{\rho}(\tau, V)$  и всех ее частных производных до второго порядка включительно.

Согласно §2.3 значения  $\bar{\rho}(\tau, v)$  находятся из условий стационарности для вспомогательной функции (2.3.2). Значения же производных могут быть вычислены с помощью теоремы о неявных функциях, примененной к этим условиям стационарности.

Рассмотрим данный подход конкретно для случая многокритериальной модели (3.4.1)–(3.4.2).

Вначале заметим, что условие задачи (3.4.4) содержит негладкие зависимости  $F_{(k)v}^*$   $k = \overline{1, T}$ , которые суть решения задач (3.4.3). Поэтому сглаживающим свойством метода функций обратных связей мы воспользуемся не только при решении задачи второго уровня (3.4.4), но также и для задач (3.4.3).

Пусть вспомогательная функция для  $k$ -ой задачи (3.4.3)

$$U_{(k)}(\tau, X, \Lambda, V) = F_k(X, V) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X, V) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i). \quad (3.4.6)$$

Тогда условия стационарности функции (3.4.6) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{(k)}}{\partial x_p} = 0 \quad p = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial U_{(k)}}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = \overline{1, m} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad (3.4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{grad}_x F_k(\overline{X}_{(k)}, V) - \sum_{i=1}^m \overline{\lambda}_{(k)i} \operatorname{grad}_x f_i(\overline{X}_{(k)}, V) = 0, \\ -f_i(\overline{X}_{(k)}, V) + Q(\tau, \overline{\lambda}_{(k)i}) = 0 \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (3.4.7)$$

Решение системы (3.4.7) позволяет построить

$$\bar{U}_{(k)}(\tau, V) = U_{(k)}\left(\tau, \bar{X}_{(k)}(\tau, V), \bar{\Lambda}_{(k)}(\tau, V), V\right). \quad (3.4.8)$$

Эту гладкую функцию можно использовать как аппроксимацию зависимостей  $F_{(k)v}^*$  в условии задачи второго уровня (3.4.4).

По теореме 2.1.3 к условиям стационарности вспомогательной функции (3.4.7) возможно применение теоремы о неявных функциях. Это дает  $\forall k = \overline{1, T}$  системы линейных уравнений для значений производных от компонент вектор-функций  $\bar{X}_{(k)}(\tau, V)$  и  $\bar{\Lambda}_{(k)}(\tau, V)$  по параметрам  $v_t \quad t = \overline{1, K}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j \partial x_p} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial x_j \partial v_t} \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{p=1}^n \frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial \lambda_i \partial x_p} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial v_t} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_q} \frac{\partial \bar{\lambda}_q}{\partial v_t} = -\frac{\partial^2 U_{(k)}}{\partial \lambda_i \partial v_t} \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \quad (3.4.9)$$

Основная матрица системы линейных уравнений (3.4.9) есть матрица Гессе для вспомогательной функции (3.4.6). Ее элементы, равно как и компоненты столбца правых частей, вычисляются в точке  $\{\bar{X}_{(k)}(\tau, V), \bar{\Lambda}_{(k)}(\tau, V)\}$ .

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи *второго уровня* (3.4.4).

Для удобства записи введем обозначения

$$\phi_k(\rho, X, V) = \bar{U}_{(k)}(\tau, V) - F_k(X, V) - \rho \quad k = \overline{1, T}.$$

Тогда условие задачи второго уровня примет вид

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{X \in E^n, \rho \geq 0\} && -\rho \\ \text{при условиях:} & f_i(X, V) \leq 0 && i = \overline{1, m}, \\ & \phi_k(\rho, X, V) \leq 0 && k = \overline{1, T}. \end{aligned}$$

Вспомогательная функция (2.3.2) для этой задачи выглядит так:

$$\begin{aligned} & U(\tau, \rho, X, \Lambda, \mu, V) = \\ & = -\rho - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(X, V) - \sum_{k=1}^T \mu_k \phi_k(\rho, X, V) - && (3.4.10) \\ & -R(\tau, \rho) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i) + \sum_{k=1}^T R(\tau, \mu_k), \end{aligned}$$

где  $\|\mu\| = \|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T\|$ .

Условия стационарности функции  $\mathbb{U}$  имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + \sum_{k=1}^N \bar{\mu}_k - Q(\tau, \bar{\rho}) = 0, \\ -\sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{X}, V) - \sum_{k=1}^N \bar{\mu}_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}(\bar{\rho}, \bar{X}, V) = 0 \quad j = \overline{1, n}, \\ -f_i(\bar{X}, V) + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 \quad i = \overline{1, m}, \\ -\phi_k(\bar{\rho}, \bar{X}, V) + Q(\tau, \bar{\mu}_k) = 0 \quad k = \overline{1, T}, \end{array} \right. \quad (3.4.11)$$

здесь  $\{ \bar{\rho}, \bar{X}, \bar{\lambda}, \bar{\mu} \}$  стационарная точка вспомогательной функции (3.4.10).



Рассмотрим, наконец, задачу *третьего уровня*. В качестве гладкой аппроксимации зависимости  $\rho_v^{**}$  выберем функцию

$$\bar{\bar{U}}(\tau, V) = \mathbb{U}\left(\tau, \bar{\rho}(\tau, V), \bar{X}(\tau, V), \bar{\Lambda}(\tau, V), \bar{\mu}(\tau, V), V\right). \quad (3.4.13)$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции, частная производная от  $\bar{\bar{U}}$  по  $v_t$   $t = \bar{1}, \bar{K}$  имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial v_t} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial v_t} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_t} + \sum_{k=1}^T \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t}.$$

Все частные производные от функции  $\bar{\bar{U}}$  в этой формуле вычисляются в точке  $\{ \tau, \bar{\rho}, \bar{X}, \bar{\Lambda}, \bar{\mu}, V \}$ . Поэтому в силу (3.4.11) данное выражение упрощается до

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial v_t} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial v_t} \left( \tau, \bar{\rho}(\tau, V), \bar{X}(\tau, V), \bar{\Lambda}(\tau, V), \bar{\mu}(\tau, V), V \right) \quad \forall t = \bar{1}, \bar{K}. \quad (3.4.14)$$

Таким образом, для решения задачи третьего уровня любым методом *первого* порядка достаточно уметь находить лишь решения систем (3.4.7) и (3.4.11)  $\forall V \in \Upsilon$ . Погрешность аппроксимации зависит от величины параметра  $\tau$  и стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ .

В случае использования методов *второго* порядка, помимо решений систем (3.4.7) и (3.4.11), потребуются также и значения частных производных аппроксимирующей функции (3.4.13) второго порядка.

Непосредственное дифференцирование формулы (3.4.14) с учетом (3.4.11) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\bar{U}}}{\partial v_s \partial v_t} &= \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial v_t} + \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial v_t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial v_t} + \\ &+ \sum_{k=1}^T \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial v_s \partial \mu_k} \frac{\partial \bar{\mu}_k}{\partial v_t} \quad \forall s, t = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Откуда следует, что в случае применения методов второго порядка для вычисления матрицы Гессе  $\nabla^2 \bar{\bar{U}}$  в каждой пробной точке  $V \in \Upsilon$  придется также решать и линейную систему (3.4.12).

## Пример трехуровневой задачи для многокритериальной модели

Использование метода функций обратных связей для решения трехуровневой оптимизационной параметрической задачи рассмотрим на конкретном примере.

С одной стороны, этот пример прост и легко проверяем. С другой стороны, он в полной мере иллюстрирует особенности решения оптимизационных задач для многокритериальных математических моделей с параметрами.

Пусть подлежащие максимизации по  $X \in E^3$  с  $V \in E^2$  целевые функции модели суть

$$F_1(X, V) = x_1, \quad F_2(X, V) = x_2, \quad F_3(X, V) = x_3.$$

При этом множество допустимых состояний задается системой неравенств

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq 1,$$

а множество  $\Upsilon$  пусть определено как

$$1 \leq v_1 \leq B, \quad 1 \leq v_2 \leq B, \quad 2v_1 + v_2 \geq C,$$

где  $A = 11$ ,  $B = 5$  и  $C = 7$ .

В рассматриваемой модели  $K = 2$  и  $T = 3$  и задачи *первого уровня* будут иметь вид:

$$\forall k = 1, 2, 3 \quad \text{максимизировать по } x \in E^3 \quad F_{(k)} = x_{(k)k}$$

при условиях

$$x_{(k)1} \geq 0, x_{(k)2} \geq 0, x_{(k)3} \geq 0, \quad \frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} \leq 1.$$

Для решения этих задач используем функцию обратных связей вида

$$Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right) \quad \text{с} \quad R(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( \frac{s^2}{2} - \ln s - \frac{1}{2} \right).$$

Тогда вспомогательные функции (3.4.6) для них записываются как

$$\begin{aligned} U_{(k)}(X, V) &= \\ &= x_{(k)k} - \lambda_{(k)} \left( \frac{x_{(k)1}}{v_1} + \frac{x_{(k)2}}{v_2} + \frac{x_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1 \right) - \\ &\quad - R(\tau, x_{(k)1}) - R(\tau, x_{(k)2}) - R(\tau, x_{(k)3}) + R(\tau, \lambda_{(k)}). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Соответственно, условия стационарности  $U_{(k)}(X, V)$  при фиксированном  $V \in \Upsilon$  будут

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{k1} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{v_1} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)1}) = 0, \\ \delta_{k2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{v_2} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)2}) = 0, \\ \delta_{k3} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)}}{A - v_1 - v_2} - Q(\tau, \bar{x}_{(k)3}) = 0, \\ \frac{\bar{x}_{(k)1}}{v_1} + \frac{\bar{x}_{(k)2}}{v_2} + \frac{\bar{x}_{(k)3}}{A - v_1 - v_2} - 1 - Q(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.4.17)$$

В свою очередь, решения системы (3.4.17) позволяют находить значения функций (3.4.8), которые в рассматриваемом примере определяются следующими из (3.4.16) и (3.4.17), формулами

$$\begin{aligned} \bar{U}_{(k)}(\tau, V) = & x_{(k)k}(\tau, V) - \\ & - R(\tau, \bar{x}_{(k)1}(\tau, V)) - R(\tau, \bar{x}_{(k)2}(\tau, V)) - R(\tau, \bar{x}_{(k)3}(\tau, V)) + \\ & + R(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}(\tau, V)) - \bar{\lambda}_{(k)}(\tau, V) Q(\tau, \bar{\lambda}_{(k)}(\tau, V)). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Компоненты их градиентов по  $V$  будут равны  $\forall k = \overline{1, K}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_{(k)}}{\partial v_1} &= \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)1}}{v_1^2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2}, \\ \frac{\partial \bar{U}_{(k)}}{\partial v_2} &= \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)2}}{v_2^2} - \frac{\bar{\lambda}_{(k)} \bar{x}_{(k)3}}{(A - v_1 - v_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Применим теперь метод функций обратных связей для решения задачи второго уровня (3.4.4).

В формулировке этой задачи вместо зависимостей  $F_{(k)v}^*$  используем их сглаженные аппроксимации  $\bar{U}_{(k)}(\tau, v_1, v_2) \quad \forall k = 1, 2, 3$ .

Тогда задача второго уровня для рассматриваемой модели примет вид:

$$\begin{aligned}
 & \text{максимизировать} \quad -\rho \\
 & \text{при условиях} \quad \rho \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
 & 1, \quad \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} \leq \\
 & \quad (3.4.20) \\
 & \quad \bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - x_1 - \rho \leq 0, \\
 & \quad \bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - x_2 - \rho \leq 0, \\
 & \quad \bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - x_3 - \rho \leq 0.
 \end{aligned}$$

Вспомогательная функция задачи второго уровня будет

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U}(\tau, \rho, X, \Lambda, \mu) = & \\
 = -\rho - \lambda & \left( \frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_2} + \frac{x_3}{A - v_1 - v_2} - 1 \right) - \\
 -\mu_1 & \left( \bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - x_1 - \rho \right) - \\
 -\mu_2 & \left( \bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - x_2 - \rho \right) - \\
 -\mu_3 & \left( \bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - x_3 - \rho \right) - \\
 -R(\tau, \rho) - R(\tau, x_1) - R(\tau, x_2) - R(\tau, x_3) + R(\tau, \lambda) + \\
 +R(\tau, \mu_1) + R(\tau, \mu_2) + R(\tau, \mu_3), &
 \end{aligned}$$

где  $\lambda$  и  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  суть множители Лагранжа четырех последних ограничений в (3.4.20).

Выпишем теперь условия, которые будут определять стационарные точки вспомогательной функции в задаче второго уровня (3.4.20).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_1} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_2} = 0, \\ \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \mu_3} = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_3 - Q(\tau, \bar{\rho}) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{v_1} + \bar{\mu}_1 - Q(\tau, \bar{x}_1) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{v_2} + \bar{\mu}_2 - Q(\tau, \bar{x}_2) = 0, \\ -\frac{\bar{\lambda}}{A - v_1 - v_2} + \bar{\mu}_3 - Q(\tau, \bar{x}_3) = 0, \\ \frac{\bar{x}_1}{v_1} + \frac{\bar{x}_2}{v_2} + \frac{\bar{x}_3}{A - v_1 - v_2} - 1 - Q(\tau, \bar{\lambda}) = 0, \\ \bar{U}_{(1)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_1 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_1) = 0, \\ \bar{U}_{(2)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_2 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_2) = 0, \\ \bar{U}_{(3)}(\tau, v_1, v_2) - \bar{x}_3 - \bar{\rho} - Q(\tau, \bar{\mu}_3) = 0. \end{array} \right.$$

(3.4.21)

Получив решения системы (3.4.21), можно построить сглаживающую аппроксимацию для зависимости  $\rho_v^{**}$ , которая используется в постановке задачи третьего уровня. В качестве такой аппроксимации возьмем функцию

$$\bar{\bar{U}}(\tau, V) = \mathbb{U}\left(\tau, \bar{\rho}(\tau, V), \bar{x}(\tau, V), \bar{\lambda}(\tau, V), \bar{\mu}(\tau, V)\right),$$

компоненты градиента которой по  $V$  согласно (3.4.14) равны соответственно

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial v_1} = \frac{\bar{\lambda} \bar{x}_1}{v_1^2} - \frac{\bar{\lambda} \bar{x}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial \bar{U}_{(1)}}{\partial v_1} - \bar{\mu}_2 \frac{\partial \bar{U}_{(2)}}{\partial v_1} - \bar{\mu}_3 \frac{\partial \bar{U}_{(3)}}{\partial v_1},$$

и

$$\frac{\partial \bar{\bar{U}}}{\partial v_2} = \frac{\bar{\lambda} \bar{x}_2}{v_2^2} - \frac{\bar{\lambda} \bar{x}_3}{(A - v_1 - v_2)^2} - \bar{\mu}_1 \frac{\partial \bar{U}_{(1)}}{\partial v_2} - \bar{\mu}_2 \frac{\partial \bar{U}_{(2)}}{\partial v_2} - \bar{\mu}_3 \frac{\partial \bar{U}_{(3)}}{\partial v_2}, \tag{3.4.22}$$

где значения частных производных в правых частях определяются формулами (3.4.19).

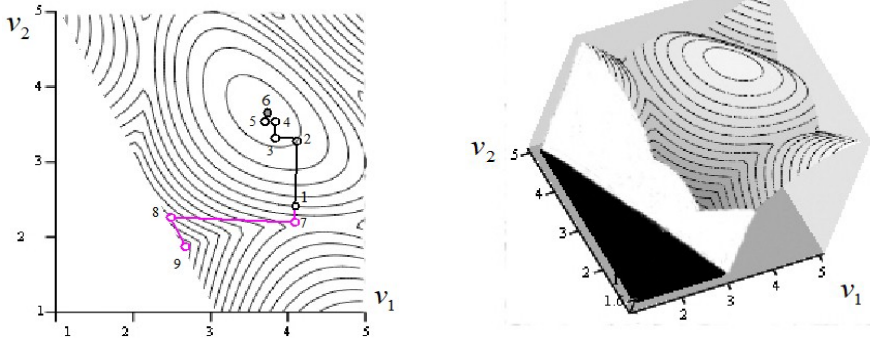


Рис. 3.4.1. Система изолиний и 3d-график функции  $-\bar{U}(\tau, v_1, v_2)$

Для большей наглядности рассмотрим легко проверяемый вариант задачи третьего уровня:

*найти локальные экстремальные значения зависимости  $\rho_v^{**}$  в случае, когда множество  $\Upsilon \subset E^2$  определяется системой неравенств*

$$\begin{cases} 1 \leq v_1 \leq 5, \\ 1 \leq v_2 \leq 5, \\ 2v_1 + v_2 \geq 7. \end{cases}$$

Геометрически эта задача допускает такую интерпретацию: требуется найти значения параметров  $v_1$  и  $v_2$ , *оптимизирующих* (по величине рассогласования критериев) *форму* сглаженной аппроксимации множества Парето рассматриваемой многокритериальной модели.

Система изолиний и пространственный график аппроксимации зависимости  $\rho_v^{**}$ , то есть функции  $-\bar{U}(\tau, v_1, v_2)$ , показаны на рис. 3.4.1.

Для поиска максимума в задаче третьего уровня применен метод *наискорейшего подъема*. В качестве направляющего вектора  $w$  использовался *нормированный градиент* функции  $-\overline{\overline{U}}(\tau, v_1, v_2)$ . Оценка величины шага определялась по значениям этой функции вдоль  $w$ .

Основные количественные характеристики для нескольких начальных итераций процесса решения при  $\tau = 0.01$  приведены в табл. 3.4.1а—3.4.1б. Точное решение задачи третьего уровня (поиска локального максимума) (точка б на рис. 3.4.1) имеет вид:

$$v_1^{**} = \frac{11}{3}, \quad v_2^{**} = \frac{11}{3}, \quad \rho_{v^{**}} = \frac{22}{9}.$$

Т а б л и ц а 3.4.1а.

Точка на рис.4	$v_1$	$v_2$	$-\overline{\overline{U}}$
1	4.000000000	2.500000000	2.292876919
2	4.108927815	3.418563950	2.427442369
3	3.751137224	3.458387226	2.440214361
4	3.766947377	3.609311384	2.443407623
5	3.686757173	3.617925071	2.444096417
<i>Точное решение</i>	3.666666667	3.666666667	2.444444444

Локальный минимум в задаче третьего уровня определялся методом *проекции антиградиента*. Количественные характеристики первых трех шагов соответствующего итерационного процесса при  $\tau = 0.01$  приведены в табл. 3.4.2а–3.4.2б.

Точное решение этой задачи (точка 9 на рис. 3.4.1) имеет вид:

$$v_1^{**} = \frac{1+\sqrt{141}}{5}, \quad v_2^{**} = \frac{33-2\sqrt{141}}{5}, \quad \rho_{v^{**}} = \frac{33-2\sqrt{141}}{5}.$$

Для демонстрации сглаживающего свойства метода функций обратных связей на рис. 3.4.2 приведены графики функции

$$\bar{\Phi}(\tau, v_1) = -\bar{\bar{U}}(\tau, v_1, 7 - 2v_1,)$$

при  $\tau = 0.05, 0.025, 0.01$ , а также при  $\tau \rightarrow +0$ .

Т а б л и ц а 3.4.1б.

Точка на рис.4	Норма град.	$w_1$	$w_2$	Шаг
1	0.292812466	0.117759800	0.993042109	0.925000000
2	0.070259924	-0.993862751	0.110620212	0.360000000
3	0.041937320	0.104185521	0.994557880	0.151750000
4	0.017053825	-0.994280382	0.106801322	0.080651500
5	0.009512746	...	...	...

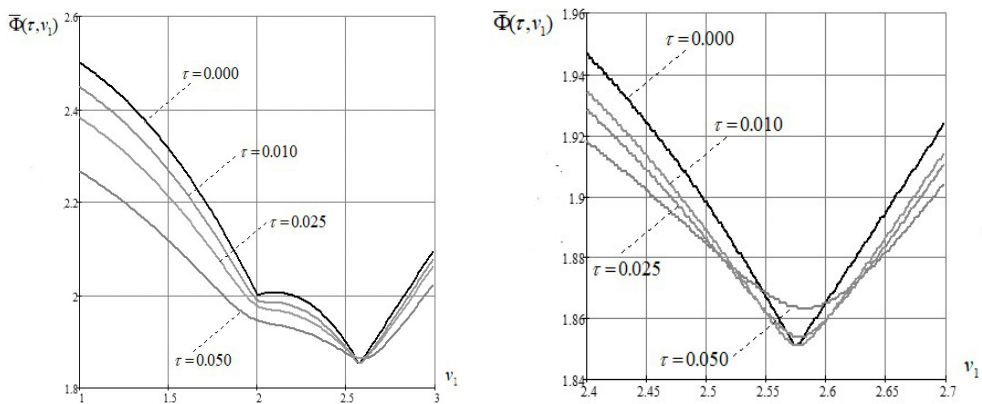


Рис. 3.4.2. Графики функции  $\bar{\Phi}(\tau, v_1)$

Т а б л и ц а 3.4.2а.

Точка на рис.4	$v_1$	$v_2$	$-\bar{v}$
1	4.000000000	2.500000000	2.292876919
7	3.962274029	2.181865306	2.181828016
8	2.311246750	2.377506503	1.976736712
9	2.574871109	1.850257785	1.850234349
<i>Точное решение</i>	2.574868417	1.850263165	1.850263165

Т а б л и ц а 3.4.2б.

Точка на рис.4	Норма град.	$w_1$	$w_2$	Шаг
1	0.292812466	-0.117759800	-0.993042109	0.320363750
7	0.085751139	-0.993052354	0.117673374	1.662578285
8	0.433886194	0.447213595	-0.894427191	0.589481987
9	...	...	...	...

## Задачи теории игр

Другим направлением исследования операций, где используются суперпозиции операций поиска экстремума является теория игр.

Рассмотрим применение метода функций обратных связей для решения простейшей игровой задачи. При этом мы немного изменим ее условие, чтобы в полной мере продемонстрировать особенности использования этого алгоритма.

Пусть в игре участвуют два игрока: первый  $A$  и второй  $B$ . Оба делают только по одному ходу. Ход заключается в выборе одного из заранее известного набора действий, который будем называть *стратегией*. При этом выбора противника игроки не знают. Для каждой пары выбранных стратегий известен *исход игры*: величина выигрыша одного игрока, равная проигрышу другого.

В задаче требуется найти выбор стратегий, который максимизирует гарантированный выигрыш для игрока  $A$ .

Рассмотрим следующий вариант ее постановки.

Пусть у игроков  $A$  и  $B$ , имеются наборы стратегий с номерами  $j = \overline{1, n}$  и  $i = \overline{1, m}$  соответственно.

Исход игры есть вещественное число  $\alpha_{ij}$ , равное выигрышу игрока  $A$  (и, соответственно, проигрышу  $B$ ) при выборе первым игроком стратегии с номером  $j$ , а вторым стратегии с номером  $i$ . Исходы игры можно записать в виде матрицы  $\|\alpha_{ij}\|$ , которую будем называть *платежной матрицей*.

Нетрудно заключить, что оптимальная стратегия игрока  $A$  заключается в выборе  $j^+$  и  $i^+$  таких, что

$$\alpha_{j^+i^+} = \max_{j=\overline{1, n}} \min_{i=\overline{1, m}} \alpha_{ij}.$$

Аналогично можно сформулировать задачу поиска оптимальной стратегии игрока  $B$ . Например, найти стратегию, минимизирующая его неизбежный проигрыш, то есть найти  $j^\times$  и  $i^\times$ , для которых

$$\alpha_{j^\times i^\times} = \min_{i=1, \overline{m}} \max_{j=1, \overline{n}} \alpha_{ij}.$$

В этом случае естественно возникает вопрос: приводят ли оптимальные стратегии игроков  $A$  и  $B$  к одному и тому же результату игры? То есть верно ли равенство

$$\alpha_{j+i} = \alpha_{j^\times i^\times}?$$

Такое возможно. Скажем, в случае, когда все элементы в платежной матрице одинаковые. Однако, примеры также показывают, что это равенство может и не выполняться.

Рассмотрим данную игровую задачу подробнее, несколько усложнив ее постановку.

Во-первых, будем считать, что элементы платежной матрицы суть достаточно гладкие функции от вектора экзогенных параметров

$$V = \| v_1, v_2, \dots, v_K \|^T,$$

принадлежащего некоторой области  $\Upsilon \subseteq E^K$ . То есть платежная матрица есть *матричная функция* вида  $\| \alpha_{ij}(V) \|^T$ .

Во-вторых, предположим, что выбор стратегии в игре выполняется *неограниченное* число раз. Причем условия *всех выборов одинаковы и не зависят от результатов других*.

Наконец, пусть каждый из игроков выбирает одну из доступных ему стратегий *случайным* образом. Будем считать, что первый игрок выбирает стратегию  $j$  с вероятностью  $x_j$ . Понятно, что при этом

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1.$$

Вектор  $X = \| x_1, x_2, \dots, x_n \|^T$  принято называть *смешанной стратегией* игрока  $A$ .

Также отметим, что решениям исходной задачи с *однократным* выбором стратегий будет являться смешанная стратегия, все компоненты которой равны нулю, кроме одной, равной единице. Такие решения, называемые решениями *в чистых стратегиях*, вообще говоря, существуют не для любой платежной матрицы.

Нетрудно видеть, что задача поиска оптимальной смешанной стратегии первого игрока есть задача линейного параметрического программирования:

*максимизировать по  $\{x, f\}$  функцию  $f$*

$$\begin{aligned} \text{при условиях } x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(V) x_j \geq f \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Сформулируем теперь задачу поиска оптимальной смешанной стратегии игроком  $B$ .

Пусть второй игрок выбирает стратегию  $i$  с вероятностью  $\lambda_i$  и вектор  $\Lambda = \|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\|^T$ . Тогда получаем задачу

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать по } \{\Lambda, g\} \text{ функцию } g \\ & \text{при условиях } \lambda_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad (3.5.2) \\ & \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(V) \lambda_i \leq g \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Эта задача является двойственной к задаче (3.5.1).

В задаче (3.5.2) величина  $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(V) \lambda_i$  есть *математическое ожидание* проигрыша игрока  $B$  при выборе игроком  $A$   $j$ -й стратегии. Решение задачи (3.5.2) будем обозначать  $\{\Lambda_v^*, g_v^*\}$ . В этом случае величина  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(V) x_j$  оказывается *математическим ожиданием* выигрыша игрока  $B$  при выборе им  $i$ -й стратегии.

Из теории линейного программирования известно, что для двойственных пар задач в случае ограниченных решений значения прямой и двойственных целевых функций равны. Это означает, что в смешанных стратегиях оптимальные выборы игроков  $A$  и  $B$  всегда приводят к одинаковому результату игры.

Выясним теперь, как будут зависеть оптимальные стратегии игроков от вектора экзогенных параметров  $V$ .

Как было отмечено, решением задачи (3.5.1) является зависимость  $\{X_v^*, f_v^*\}$ , которая может не быть определенной во всем  $E^n$ , не являться функцией от  $V$ , а в случае функциональности не иметь производных по компонентам  $V$ . Для преодоления этих затруднений воспользуемся сглаживающим свойством метода функций обратных связей.

Пусть компоненты вектора  $V$  и параметр  $\tau > 0$  фиксированы. Тогда использование метода функций обратных связей для решения пары задач (3.5.1) – (3.5.2) сводится к поиску стационарных точек по  $\{X, \Lambda, f, g\}$  для вспомогательной функции

$$\begin{aligned}
 & U(\tau, X, \Lambda, f, g, V) = \\
 & = f - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( f - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(V) x_j \right) - g \left( -1 + \sum_{j=1}^n x_j \right) - \sum_{j=1}^n R(\tau, x_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i).
 \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Эти условия стационарности определяются системой уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(V) \bar{\lambda}_i - \bar{g} - Q(\tau, \bar{x}_j) = 0 \quad j = \overline{1, n}, \\
 1 - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_j = 0, \quad 1 - \sum_{j=1}^n \bar{x}_j = 0, \\
 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(V) \bar{x}_j - \bar{f} + Q(\tau, \bar{\lambda}_i) = 0 \quad i = \overline{1, m}.
 \end{array} \right. \tag{3.5.4}$$

В теореме 2.2.2 доказано, что  $\forall V \in E^K$  система вида (3.5.4) однозначно разрешима. При этом для ее решений  $\bar{f}(\tau, V)$  и  $\bar{g}(\tau, V)$  справедливы равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{f}(\tau, V) = f_v^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{g}(\tau, V) = g_v^*.$$

Тогда в силу теоремы 2.3.3 функции  $\bar{f}(\tau, V)$  и  $\bar{g}(\tau, V)$  можно использовать как гладкие аппроксимации зависимостей  $f_v^*$  и  $g_v^*$ .

Пусть вторые частные производные у всех функций  $\alpha_{ij}(V)$  непрерывны. В этом случае для решения задач, в постановку которых входят зависимости  $f_v^*$  и  $g_v^*$ , можно использовать тейлоровские аппроксимации функций  $\bar{f}(\tau, V)$  и  $\bar{g}(\tau, V)$  до второго порядка включительно.

Наконец, совместное использование правила дифференцирования сложной функции и теоремы о неявных функциях для условий (3.5.4), позволяет в качестве аппроксимации градиента функции  $\bar{f}(\tau, V)$  принять вектор-функцию с компонентами

$$\bar{U}'_{v_t}(\tau, V) = \frac{\partial U}{\partial v_t}(\tau, \bar{X}, \bar{\Lambda}, \bar{f}, \bar{g}, V) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_j \bar{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_{ij}(V)}{\partial v_t} \quad t = \bar{1}, \bar{K}. \tag{3.5.5}$$

Как пример, используем метод функций обратных связей для исследования решений игровой задачи с платежной матрицей, рассмотренной в §3.3 и зависящей от двух скалярных параметров  $v_1$  и  $v_2$ .

$$\|D_{ij}(V)\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 25 - v_1 - v_2 & 3 & 4 \\ 5 & v_1 & 7 & 8 \\ 9 & v_2 & 11 & 12 \end{array} \right\|. \quad (3.5.6)$$

Не трудно видеть, что для этой матрицы величины

$$D_{\min\max} = \min_{i=1,3} \left( \max_{j=1,4} D_{ij}(v_1, v_2) \right) \quad \text{и} \quad D_{\max\min} = \max_{j=1,4} \left( \min_{i=1,3} D_{ij}(v_1, v_2) \right)$$

являются непрерывными, кусочно-линейными функциями от  $v_1$  и  $v_2$ . Допустим, что значения их аргументов  $v_1 \in [0, 15]$  и  $v_2 \in [0, 15]$ .

Для исследования свойств этих функций воспользуемся их гладкими аппроксимациями, которые получаются методом функций обратных связей из формул (3.3.2) и (3.3.3) и имеют вид:

$$\bar{D}_{\min\max}(\tau, v_1, v_2) = -\tau \ln \sum_{j=1}^4 \left( \sum_{i=1}^3 e^{-\frac{D_{ij}(v_1, v_2)}{\tau}} \right)^{-1} \tag{3.5.7}$$

$$\bar{D}_{\max\min}(\tau, v_1, v_2) = \tau \ln \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^4 e^{-\frac{D_{ij}(v_1, v_2)}{\tau}} \right)^{-1} .$$

Системы изолиний функций  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, v_1, v_2)$  и  $\bar{D}_{\max\min}(\tau, v_1, v_2)$  при значении  $\tau = 0.05$  приведены на рис. 3.3.1 и 3.3.2 соответственно. На этих рисунках также показаны их значения в характерных точках.

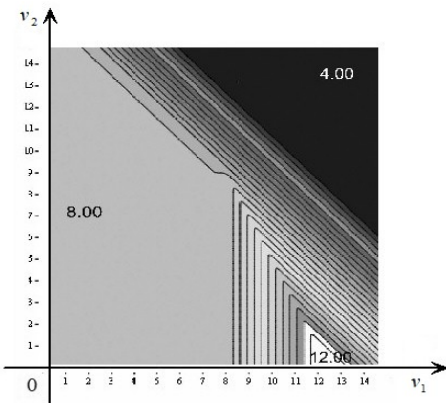


Рис. 3.3.1. Система изолиний функции  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, v_1, v_2)$

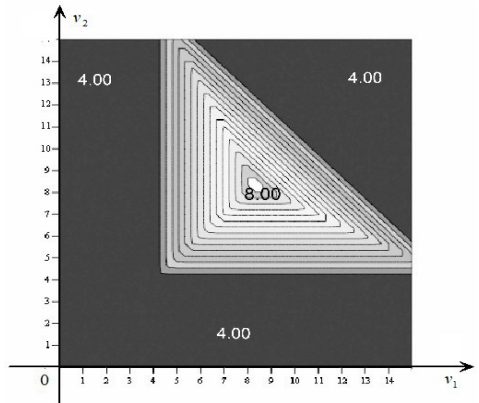


Рис. 3.3.2. Система изолиний функции  $\bar{D}_{\max\min}(\tau, v_1, v_2)$

Известно, что решение пары задач (3.5.1)—(3.5.2) в смешанных стратегиях существует для любой платежной матрицы. Однако особый интерес представляют решения в *чистых стратегиях*. То есть решения, в которых все компоненты как вектора  $x$ , так и вектора  $L$ , равны нулю, кроме одного, равного единице.

Условием существования такого решения является наличие у платежной матрицы *седлового элемента*, то есть элемента  $\alpha_{ij}$ , для которого

$$\alpha_{ij} = D_{\min\max} = D_{\max\min}.$$

Выполнение этого условия очевидно зависит от значений параметров  $v_1$  и  $v_2$ . На рис. 3.5.1 показана система изолиний для функции

$$\bar{D}_{\min\max}(\tau, v_1, v_2) - \bar{D}_{\max\min}(\tau, v_1, v_2)$$

для значения  $\tau = 0.05$ . Здесь черным цветом отмечены точки, в которых матрица (3.5.6) имеет седловые элементы.

В качестве сглаженных аппроксимаций зависимостей  $D_{\min\max}$  и  $D_{\max\min}$  от  $\tau$ ,  $v_1$  и  $v_2$  можно использовать решения системы (3.5.4) и формулы (3.5.5). Отметим также, что в рассматриваемом примере производные (3.5.5) находятся по формулам

$$\bar{U}'_{v_1} = -\bar{x}_2\bar{\lambda}_1 + \bar{x}_2\bar{\lambda}_2 \quad \text{и} \quad \bar{U}'_{v_2} = -\bar{x}_2\bar{\lambda}_1 + \bar{x}_2\bar{\lambda}_3.$$

В качестве иллюстрации в табл. 3.5.1а и 3.5.1б приведены значения аргументов стационарных точек вспомогательной функции (3.5.3) для  $v_1 = 10$  и  $v_2 = 9$  при различных  $\tau$ .

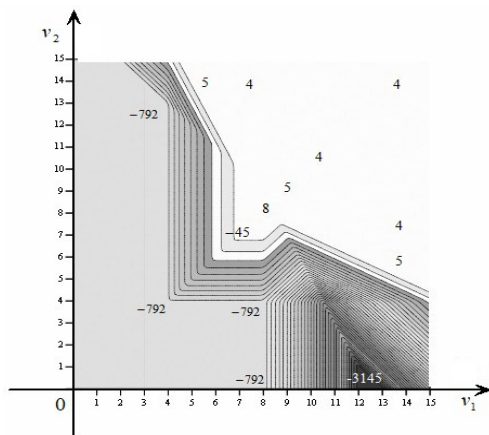
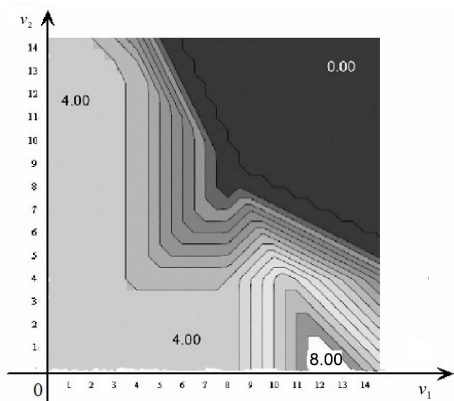


Рис. 3.5.1. Система изолиний функции  $\bar{D}_{\min\max}(\tau, v_1, v_2) - \bar{D}_{\max\min}(\tau, v_1, v_2)$

Рис. 3.5.2. Система изолиний функции  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  в масштабе 1.00

Т а б л и ц а 3.5.1а

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{f}$
$10^{-1}$	0.010143028	0.946888255	0.017065774	0.025902943	5.843463575
$10^{-2}$	$1.0016 \cdot 10^{-3}$	0.994816832	$1.6712 \cdot 10^{-3}$	$2.5103 \cdot 10^{-3}$	5.984928431
$10^{-3}$	$1.0002 \cdot 10^{-4}$	0.999483166	$1.6671 \cdot 10^{-4}$	$2.5010 \cdot 10^{-4}$	5.998499278
$10^{-4}$	$1.0000 \cdot 10^{-5}$	0.999948332	$1.6667 \cdot 10^{-5}$	$2.5001 \cdot 10^{-5}$	5.999849993
$10^{-5}$	$1.0000 \cdot 10^{-6}$	0.999994833	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	$2.5000 \cdot 10^{-6}$	5.999985000
$10^{-6}$	$1.0000 \cdot 10^{-7}$	0.999999483	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	$2.5000 \cdot 10^{-7}$	5.999998500
$10^{-7}$	$1.0000 \cdot 10^{-8}$	0.999999948	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	$2.5000 \cdot 10^{-8}$	5.999999850
$10^{-8}$	$1.0000 \cdot 10^{-9}$	0.999999995	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	$2.5000 \cdot 10^{-9}$	5.999999985
Точн. реш.	0	1	0	0	6

Значения параметров, для которых существуют седловые элементы, неединственны. Это позволяет расширять спектр постановок задач для игровых математических моделей. Например можно рассмотреть следующую задачу.

Т а б л и ц а 3.5.1б

$\tau$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{g}$	$\bar{U}'_{v_1}$	$\bar{U}'_{v_2}$
$10^{-1}$	0.972216214	0.012489251	0.015294535	6.101300739	-0.908754189	-0.908754189
$10^{-2}$	0.997097639	$1.2500 \cdot 10^{-3}$	$1.6524 \cdot 10^{-3}$	6.010009038	-0.990686004	-0.990285707
$10^{-3}$	0.999708477	$1.2500 \cdot 10^{-4}$	$1.6652 \cdot 10^{-4}$	6.001000087	-0.999066859	-0.999025357
$10^{-4}$	0.999970835	$1.2500 \cdot 10^{-5}$	$1.6665 \cdot 10^{-5}$	6.000100001	-0.999906669	-0.999902504
$10^{-5}$	0.999997083	$1.2500 \cdot 10^{-6}$	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	6.000010000	-0.999990667	-0.999990250
$10^{-6}$	0.999999708	$1.2500 \cdot 10^{-7}$	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	6.000001000	-0.999999067	-0.999999025
$10^{-7}$	0.999999971	$1.2500 \cdot 10^{-8}$	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	6.000000100	-0.999999907	-0.999999903
$10^{-8}$	0.999999997	$1.2500 \cdot 10^{-9}$	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	6.000000010	-0.999999991	-0.999999990
Точн. реш.	1	0	0	6	-1	-1

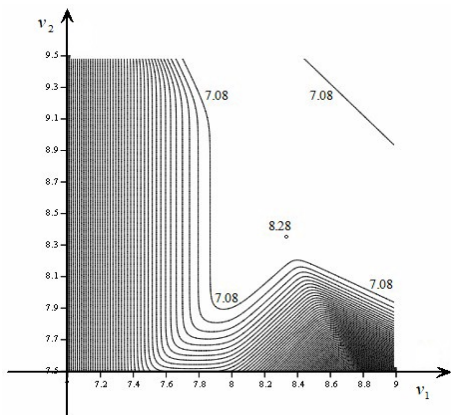


Рис. 3.5.3. Система изолиний функции  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  в масштабе 0.1

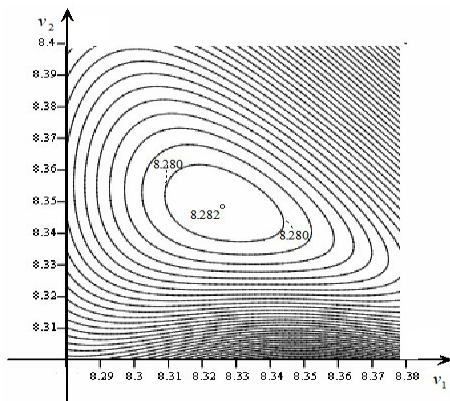


Рис. 3.5.4. Система изолиний функции  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  в масштабе 0.01

**Пример 3.5.1.** Для игры с платежной матрицей (3.5.6) найти значения параметров  $v_1$  и  $v_2$ , при которых величина  $D_{\min\max}$  имеет максимум на множестве чистых стратегий.

**Решение.** 1°. Поскольку существование решения в чистых стратегиях требует существования седловой точки у платежной матрицы, формулировка данной задачи может иметь вид:

*максимизировать по  $\{v_1, v_2\}$  значение  $D_{\min\max}$*

*при условиях  $0 \leq v_1 \leq 15, \quad 0 \leq v_2 \leq 15,$*

$$D_{\min\max} - D_{\max\min} = 0. \quad (3.5.8)$$

2°. Теперь воспользуемся методом *штрафных функций* [3, 29], чтобы приближенно оценить искомые значения  $v_1$  и  $v_2$ . Применение этого метода в рассматриваемом примере может быть сведено к безусловной максимизации вспомогательной функции вида:

$$\Phi(\Theta, v_1, v_2) = \bar{D}_{\min\max}(v_1, v_2) - \frac{1}{2\Theta} \left( \bar{D}_{\min\max}(v_1, v_2) - \bar{D}_{\max\min}(v_1, v_2) \right)^2, \quad (3.5.9)$$

при малом положительном значении  $\Theta$ .

Функция  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  является сглаженной аппроксимацией целевой функции задачи (3.5.8). Эффект сглаживания иллюстрируют рис. 3.5.2 – 3.5.4, на которых в разном масштабе показаны изолинии для функции (3.5.9) и приведены ее значения в некоторых точках. Здесь было использовано значение  $\Theta = 0.01$ .

Максимум функции  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  при  $\Theta = 0.01$  достигается в точке, для которой  $\bar{v}_1 = 8.325815949$ ,  $\bar{v}_2 = 8.348452929$  и  $\Phi(\Theta, \bar{p}, \bar{q}) = 8.28158929$ . Норма градиента функции  $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$  в этой точке равна  $1.4541 \cdot 10^{-6}$ .

Т а б л и ц а 3.5.2а

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{f}$
$10^{-1}$	$9.1459 \cdot 10^{-3}$	0.956169686	0.014420881	0.020263533	8.058310734
$10^{-2}$	$9.1515 \cdot 10^{-4}$	0.995611686	$1.4436 \cdot 10^{-3}$	$2.0296 \cdot 10^{-3}$	8.305809423
$10^{-3}$	$9.1516 \cdot 10^{-5}$	0.999561163	0.000144361	$2.0296 \cdot 10^{-4}$	8.330580921
$10^{-4}$	$9.1516 \cdot 10^{-6}$	0.999956116	$1.4436 \cdot 10^{-5}$	$2.0296 \cdot 10^{-5}$	8.333058092
$10^{-5}$	$9.2730 \cdot 10^{-7}$	0.999995508	$1.4740 \cdot 10^{-6}$	$2.0903 \cdot 10^{-6}$	8.333306242
$10^{-6}$	$1.3369 \cdot 10^{-7}$	0.999998903	$2.8735 \cdot 10^{-7}$	$6.7565 \cdot 10^{-7}$	8.333330906
$10^{-7}$	$1.5512 \cdot 10^{-8}$	0.999999720	$4.0876 \cdot 10^{-8}$	$2.2400 \cdot 10^{-7}$	8.333333009
Точн. реш.	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 3.5.2б

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{g}$	$\bar{v}'_{v_1}$	$\bar{v}'_{v_2}$
$10^{-1}$	0.657125682	0.217912820	0.124961498	8.337816823	-0.419962024	-0.508839261
$10^{-2}$	0.657393186	0.217761533	0.124845281	8.333377313	-0.437702412	-0.530210918
$10^{-3}$	0.657395820	0.217760043	0.124844137	8.333333772	-0.439442849	-0.532317980
$10^{-4}$	0.657395847	0.217760028	0.124844125	8.333333338	-0.439616526	-0.532528351
$10^{-5}$	0.640002794	0.234666153	0.125331054	8.333333333	-0.405334820	-0.514669428
$10^{-6}$	0.410689714	0.280293397	0.309016889	8.333333334	-0.130396173	-0.101672713
$10^{-7}$	0.257461958	0.457547439	0.284990604	8.333333333	0.200085425	0.027528638
Точн. реш.	***	***	***	$\frac{25}{3}$	***	***

3°. Для получения точного решения в рассматриваемом примере удобнее использовать метод линейной экстраполяции. Поскольку этот метод реализуется по формулам аналогичным рассмотренным ранее (2.4.3), то здесь ограничимся приведением лишь окончательной оценки, дающей  $v_1^* = 8.333333333$  и  $v_2^* = 8.333333333$ . В табл. 3.5.2а и 3.5.2б показано решение системы (3.5.4) для этих значений  $v_1$  и  $v_2$  при различных значениях параметра  $\tau$ .

Заметим, что при оптимальных значениях параметров седловыми элементами матрицы (3.5.6) являются элементы  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  и  $D_{32}$ . Точные решения задач (3.5.1) – (3.5.2) определены однозначно лишь для переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4, f$  и  $g$ .

Данное решение не является решением в чистых стратегиях для задачи (3.5.2). Дело в том, что решение задачи (3.5.1) при оптимальных значениях  $v_1^*$  и  $v_2^*$ , *переопределено*. То есть число активных ограничений в оптимуме задачи (3.5.1) больше ее размерности.

Решение задачи (3.5.2) в этом случае не единственно. Оптимальными значениями переменных служит произвольный набор неотрицательных чисел  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$  таких, что  $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = 1$ .

Среди этих решений есть три в чистых стратегиях. Одно такое решение с  $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 1, \lambda_3^* = 0$  показано в табл. 3.5.3a, 3.5.3b и 3.5.3c. Его можно получить, например добавив в систему (3.5.4) неравенство  $\lambda_2 \geq 1$ . Оно имеет те же значения целевых функций, что и решение в табл. 3.5.2a и 3.5.2b.

Другие решения в чистых стратегиях, где  $\lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 0$  и  $\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 1$  находятся аналогично.

Т а б л и ц а 3.5.3a

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	$\bar{f}$
$10^{-15}$	0	1	0	$1.4500 \cdot 10^{-15}$	8.333333314
<i>Точн. реш.</i>	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 3.5.3b

$\tau$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$
$10^{-15}$	$1.6928 \cdot 10^{-8}$	0.999999979	$1.7177 \cdot 10^{-8}$
<i>Точн. реш.</i>	***	***	***

Т а б л и ц а 3.5.3c

$\tau$	$\bar{g}$	$\bar{U}'_{v_1}$	$\bar{U}'_{v_2}$
$10^{-15}$	8.333333445	0.999999962	$2.4870 \cdot 10^{-10}$
<i>Точн. реш.</i>	$\frac{25}{3}$	***	***