Задачи теории игр

Другим направлением исследования операций, где используются суперпозиции операций поиска экстремума является теория игр.

Рассмотрим применение метода функций обратных связей для решения простейшей игровой задачи. При этом мы немного изменим ее условие, чтобы в полной мере продемонстрировать особенности использования этого алгоритма.

Пусть в игре участвуют два игрока: первый A и второй B. Оба делают только по одному ходу. Ход заключается в выборе одного из заранее известного набора действий, который будем называть *стратегией*. При этом выбора противника игроки не знают. Для каждой пары выбранных стратегий известен *исход игры*: величина выигрыша одного игрока, равная проигрышу другого.

В задаче требуется найти выбор стратегий, который максимизирует гарантированный выигрыш для игрока A.

Рассмотрим следующий вариант ее постановки.

Пусть у игроков A и B, имеются наборы стратегий с номерами $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,m}$ соответственно.

Исход игры есть вещественное число α_{ij}, равное выигрышу игрока A (и, соответственно, проигрышу B) при выборе первым игроком стратегии с номером j, а вторым стратегии с номером i. Исходы игры можно записать в виде матрицы $\|\alpha_{ij}\|$, которую будем называть *платежной матрицей*.

Нетрудно заключить, что оптимальная стратегия игрока A заключается в выборе j^+ и i^+ таких, что

$$\alpha_{j^+i^+} = \max_{j=\overline{1,n}} \min_{i=\overline{1,m}} \alpha_{ij} \,.$$

Аналогично можно сформулировать задачу поиска оптимальной стратегии игрока B. Например, найти стратегию, минимизирующая его неизбежный проигрыш, то есть найти $j^{\times}$ и $i^{\times}$, для которых

$$\alpha_{j^{\times}i^{\times}} = \min_{i=\overline{1,m}} \max_{j=\overline{1,n}} \alpha_{ij} \,.$$

В этом случае естественно возникает вопрос: приводят ли оптимальные стратегии игроков A и B к одному и тому же результату игры? То есть верно ли равенство

$$\alpha_{j^{+}i^{+}} = \alpha_{j^{\times}i^{\times}} ?$$

Такое возможно. Скажем, в случае, когда все элементы в платежной матрице одинаковые. Однако, пример в §3.3 показывает, что это равенство может и не выполняться.

Рассмотрим данную игровую задачу подробнее, несколько усложнив ее постановку.

Во-первых, будем считать, что элементы платежной матрицы суть достаточно гладкие функции от вектора экзогенных параметров

$$V = \| v_1, v_2, \dots v_K \|^{\mathrm{T}},$$

принадлежащего некоторой области $\Upsilon \subseteq E^K$. То есть платежная матрица есть *матричная функция* вида $\| \alpha_{ij}(V) \|$.

Во-вторых, предположим, что выбор стратегии в игре выполняется *неограниченное* число раз. Причем условия *всех выборов одинаковы и не зависят от результатов других.*

Наконец, пусть каждый из игроков выбирает одну из доступных ему стратегий *случайным* образом. Будем считать, что первый игрок выбирает стратегию j с вероятностью x_j. Понятно, что при этом

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \,.$$

Вектор $X = \| x_1, x_2, \dots x_n \|^{\mathrm{T}}$ принято называть *смешанной стратегией* игрока A.

В этом случае величина $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(V)\, x_j$ оказывается *математическим ожиданием* выигрыша игрока B при выборе им i-й стратегии.

Также отметим, что решениям исходной задачи с *однократным* выбором стратегий будет являться смешанная стратегия, все компоненты которой равны нулю, кроме одной? равной единице. Такие решения, называемые решениями *в чистых стратегиях*, как мы видели, существуют не для любой платежной матрицы.

Нетрудно видеть, что задача поиска оптимальной смешанной стратегии первого игрока есть задача линейного параметрического программирования:

$$\begin{array}{l} \textit{максимизировать по } \{x, f\} \quad \textit{функцию } \ f \\ \textit{при условиях} \quad x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n}, \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(V)\, x_j \geq f \qquad i = \overline{1,m}\,. \end{array} \tag{3.5.1}$$

Сформулируем теперь задачу поиска оптимальной смешанная стратегии игроком B.

Пусть второй игрок выбирает стратегию i с вероятностью λ_i и вектор $\Lambda = \| \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \|^{\mathrm{T}}$. Тогда получаем задачу

$$\begin{array}{l} \textit{минимизировать по } \{\Lambda, g\} \quad \textit{функцию } g \\ \textit{при условиях} \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = \overline{1,m}, \qquad \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(V)\, \lambda_i \leq g \qquad j = \overline{1,n}\,. \end{array} \tag{3.5.2}$$

Эта задача является двойственной к задаче (3.5.1).

В задаче (3.5.2) величина $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(V)\lambda_i$ есть *математическое ожидание* проигрыша игрока B при выборе игроком A j-й стратегии. Решение задачи (3.5.2) будем обозначать $\{\Lambda_v^*,\ g_v^*\}$.

Из теории линейного программирования известно, что для двойственных пар задач в случае ограниченных решений значения прямой и двойственных целевых функций равны. Это означает, что в смешанных стратегиях оптимальные выборы игроков A и B всегда приводят к одинаковому результату игры.

Выясним, как будут зависеть оптимальные стратегии игроков от вектора экзогенных параметров V.

Как было отмечено, решением задачи (3.5.1) является зависимость $\{X_v^*,\ f_v^*\}$, которая может не быть определенной во всем E^n, не являться функцией от V, а в случае функциональности не иметь производных по компонентам V. Для преодоления этих затруднений воспользуемся сглаживающим свойством метода функций обратных связей.

Пусть компоненты вектора V и параметр $\tau > 0$ фиксированы. Тогда использование метода функций обратных связей для решения пары задач (3.5.1) — (3.5.2) сводится к поиску стационарных точек по $\{X, \Lambda, f, g\}$ для вспомогательной функции

$$U(\tau, X, \Lambda, f, g, V) =$$

$$= f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(V)\, x_j \Big) - g\Big(-1 + \sum_{j=1}^{n} x_j \Big) - \sum_{j=1}^{n} R\big(\tau, x_j\big) + \sum_{i=1}^{m} R\big(\tau, \lambda_i\big). \tag{3.5.3}$$

Эти условия стационарности определяются системой уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(V)\, \overline{\lambda}_i - \overline{g} - Q\big(\tau, \overline{x}_j\big) & = & 0 & j = \overline{1,n}\,, \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_j = 0\,, \qquad 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{x}_j & = & 0\,, & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(V)\, \overline{x}_j - \overline{f} + Q\big(\tau, \overline{\lambda}_i\big) & = & 0 & i = \overline{1,m}\,. \end{array} \right. \tag{3.5.4}$$

В теореме 2.2.2 доказано, что $\forall V \in E^K$ система вида (3.5.4) однозначно разрешима. При этом для ее решений $\overline{f}(\tau, V)$ и $\overline{g}(\tau, V)$ справедливы равенства

$$\lim_{\tau \to +0} \overline{f}(\tau.V) = f_v^* \qquad \text{и} \qquad \lim_{\tau \to +0} \overline{g}(\tau.V) = g_v^* \,.$$

Тогда в силу теоремы 2.3.3 функции $\overline{f}(\tau, V)$ и $\overline{g}(\tau, V)$ можно использовать как гладкие аппроксимации зависимостей f_v^* и g_v^*.

Пусть вторые частные производные у всех функций $\alpha_{ij}(V)$ непрерывны. В этом случае для решения задач, в постановку которых входят зависимости f_v^* и g_v^*, можно использовать тейлоровские аппроксимации функций $\overline{f}(\tau, V)$ и $\overline{g}(\tau, V)$ до второго порядка включительно.

Наконец, совместное использование правила дифференцирования сложной функции и теоремы о неявных функциях для условий (3.5.4), позволяет в качестве аппроксимации градиента функции $\overline{f}(\tau, V)$ принять вектор-функцию с компонентами

$$\overline{U}'_{v_t}(\tau, V) = \frac{\partial U}{\partial v_t}\Big(\tau, \overline{X}, \overline{\Lambda}, \overline{f}, \overline{g}, V\Big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j \overline{\lambda}_i \frac{\partial \alpha_{ij}(V)}{\partial v_t} \qquad t = \overline{1, K} \,. \tag{3.5.5}$$

Как пример, используем метод функций обратных связей для исследования решений игровой задачи с платежной матрицей, рассмотренной в §3.3 и зависящей от двух скалярных параметров v_1 и v_2.

$$\|D_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 25 - v_1 - v_2 & 3 & 4 \\ 5 & v_1 & 7 & 8 \\ 9 & v_2 & 11 & 12 \end{array} \right\|. \qquad (3.5.6)$$

Не трудно видеть, что для этой матрицы величины

$$D_{\text{minmax}} = \min_{i=\overline{1,3}} \Big(\max_{j=\overline{1,4}} D_{ij}(v_1, v_2) \Big) \quad \text{и} \quad D_{\text{maxmin}} = \max_{j=\overline{1,4}} \Big(\min_{i=\overline{1,3}} D_{ij}(v_1, v_2) \Big)$$

являются непрерывными, кусочно-линейными функциями от v_1 и v_2. Допустим, что значения их аргументов $v_1 \in [0, 15]$ и $v_2 \in [0, 15]$.

Для исследования свойств этих функций воспользуемся их гладкими аппроксимациями, которые получаются методом функций обратных связей из формул (3.3.2) и (3.3.3) и имеют вид:

$$\overline{D}_{\mathrm{minmax}}(\tau, v_1, v_2) = -\tau \ln \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{3} e^{\frac{D_{ij}(v_1,v_2)}{\tau}} \right)^{-1}$$

$$\overline{D}_{\mathrm{maxmin}}(\tau, v_1, v_2) = \tau \ln \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{4} e^{-\frac{D_{ij}(v_1,v_2)}{\tau}} \right)^{-1} . \tag{3.5.7}$$

Системы изолиний функций $\overline{D}_{\mathrm{minmax}}(\tau, v_1, v_2)$ и $\overline{D}_{\mathrm{maxmin}}(\tau, v_1, v_2)$ при значении $\tau = 0.05$ приведены на рис. 3.3.1 и 3.3.2 соответственно. На этих рисунках также показаны их значения в характерных точках.

Известно, что решение пары задач (3.5.1)—(3.5.2) в смешанных стратегиях существует для любой платежной матрицы. Однако особый интерес представляют решения в *чистых стратегиях*. То есть решения, в которых все компоненты как вектора x, так и вектора L, равны нулю, кроме одного, равного единице.

Условием существования такого решения является наличие у платежной матрицы *седлового элемента*, то есть элемента α_{ij}, для которого

$$\alpha_{ij} = D_{\text{minmax}} = D_{\text{maxmin}}\,.$$

Выполнение этого условия очевидно зависит от значений параметров v_1 и v_2. На рис. 3.5.1 показана система изолиний для функции

$$\overline{D}_{\text{minmax}}(\tau, v_1, v_2) - \overline{D}_{\text{maxmin}}(\tau, v_1, v_2)$$

для значения $\tau = 0.05$. Здесь черным цветом отмечены точки, в которых матрица (3.5.6) имеет седловые элементы.

В качестве сглаженных аппроксимаций зависимостей D_{minmax} и D_{maxmin} от τ, v_1 и v_2 можно использовать решения системы (3.5.4) и формулы (3.5.5). Отметим также, что в рассматриваемом примере производные (3.5.5) находятся по формулам

$$\overline{U}'_{v_1} = -\overline{x}_2\overline{\lambda}_1 + \overline{x}_2\overline{\lambda}_2 \qquad \text{и} \qquad \overline{U}'_{v_2} = -\overline{x}_2\overline{\lambda}_1 + \overline{x}_2\overline{\lambda}_3\,.$$

В качестве иллюстрации в табл. 3.5.1a и 3.5.1b приведены значения аргументов стационарных точек вспомогательной функции (3.5.3) для $v_1 = 10$ и $v_2 = 9$ при различных τ.

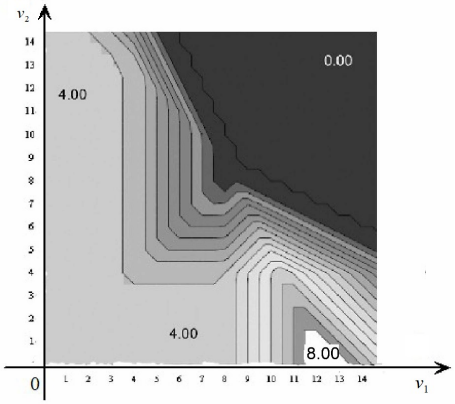

Рис. 3.5.1. Система изолиний функции $\overline{D}_{\text{minmax}}(\tau, v_1, v_2) - \overline{D}_{\text{maxmin}}(\tau, v_1, v_2)$

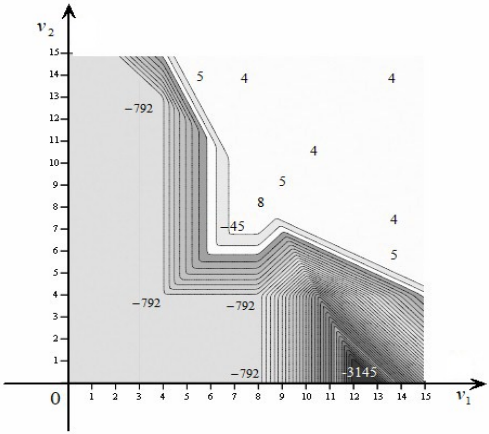

Рис. 3.5.2. Система изолиний функции $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ в масштабе 1.00

Т а б л и ц а 3.5.1a

τ	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{f}$
10^{-1}	0.010143028	0.946888255	0.017065774	0.025902943	5.843463575
10^{-2}	$1.0016 \cdot 10^{-3}$	0.994816832	$1.6712 \cdot 10^{-3}$	$2.5103 \cdot 10^{-3}$	5.984928431
10^{-3}	$1.0002 \cdot 10^{-4}$	0.999483166	$1.6671 \cdot 10^{-4}$	$2.5010 \cdot 10^{-4}$	5.998499278
10^{-4}	$1.0000 \cdot 10^{-5}$	0.999948332	$1.6667 \cdot 10^{-5}$	$2.5001 \cdot 10^{-5}$	5.999849993
10^{-5}	$1.0000 \cdot 10^{-6}$	0.999994833	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	$2.5000 \cdot 10^{-6}$	5.999985000
10^{-6}	$1.0000 \cdot 10^{-7}$	0.999999483	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	$2.5000 \cdot 10^{-7}$	5.999998500
10^{-7}	$1.0000 \cdot 10^{-8}$	0.999999948	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	$2.5000 \cdot 10^{-8}$	5.999999850
10^{-8}	$1.0000 \cdot 10^{-9}$	0.999999995	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	$2.5000 \cdot 10^{-9}$	5.999999985
Точн. реш.	0	1	0	0	6

Значения параметров, для которых существуют седловые элементы, неединственны. Это позволяет расширять спектр постановок задач для игровых математических моделей. Например можно рассмотреть следующую задачу.

Таблица 3.5.1b

τ	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	$\overline{\lambda}_3$	$\overline{g}$	$\overline{U}'_{v_1}$	$\overline{U}'_{v_2}$
10^{-1}	0.972216214	0.012489251	0.015294535	6.101300739	-0.908754189	-0.908754189
10^{-2}	0.997097639	$1.2500 \cdot 10^{-3}$	$1.6524 \cdot 10^{-3}$	6.010009038	-0.990686004	-0.990285707
10^{-3}	0.999708477	$1.2500 \cdot 10^{-4}$	$1.6652 \cdot 10^{-4}$	6.001000087	-0.999066859	-0.999025357
10^{-4}	0.999970835	$1.2500 \cdot 10^{-5}$	$1.6665 \cdot 10^{-5}$	6.000100001	-0.999906669	-0.999902504
10^{-5}	0.999997083	$1.2500 \cdot 10^{-6}$	$1.6667 \cdot 10^{-6}$	6.000010000	-0.999990667	-0.999990250
10^{-6}	0.999999708	$1.2500 \cdot 10^{-7}$	$1.6667 \cdot 10^{-7}$	6.000001000	-0.999999067	-0.999999025
10^{-7}	0.999999971	$1.2500 \cdot 10^{-8}$	$1.6667 \cdot 10^{-8}$	6.000000100	-0.999999907	-0.999999903
10^{-8}	0.999999997	$1.2500 \cdot 10^{-9}$	$1.6667 \cdot 10^{-9}$	6.000000010	-0.999999991	-0.999999990
Точн. реш.	1	0	0	6	-1	-1

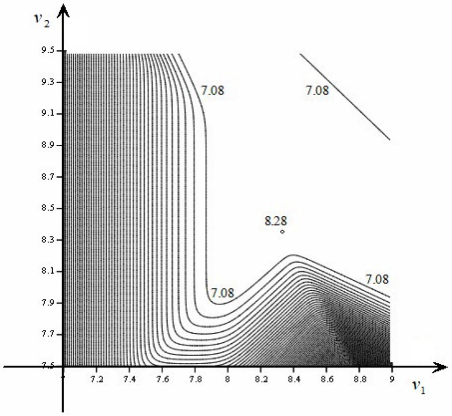

Рис. 3.5.3. Система изолиний функции $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ в масштабе 0.1

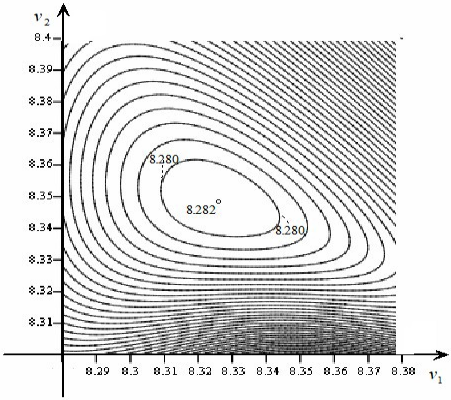

Рис. 3.5.4. Система изолиний функции $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ в масштабе 0.01

Пример 3.5.1. Для игры с платежной матрицей (3.5.6) найти значения параметров v_1 и v_2, при которых величина D_{minmax} имеет максимум на множестве чистых стратегий.

Решение. 1°. Поскольку существование решения в чистых стратегиях требует существования седловой точки у платежной матрицы, формулировка данной задачи может иметь вид:

$$\begin{gathered} \textit{максимизировать по } \{v_1, v_2\} \textit{ значение } \; D_{\text{minmax}} \\ \textit{при условиях} \quad 0 \le v_1 \le 15\,, \quad 0 \le v_2 \le 15\,, \\ D_{\text{minmax}} - D_{\text{maxmin}} = 0\,. \end{gathered} \tag{3.5.8}$$

2°. Теперь воспользуемся методом *штрафных функций* [3, 29], чтобы приближенно оценить искомые значения v_1 и v_2. Применение этого метода в рассматриваемом примере может быть сведено к безусловной максимизации вспомогательной функции вида:

$$\Phi(\Theta, v_1, v_2) = \overline{D}_{\mathrm{minmax}}(v_1, v_2) - \\ -\frac{1}{2\Theta}\Big(\overline{D}_{\mathrm{minmax}}(v_1, v_2) - \overline{D}_{\mathrm{maxmin}}(v_1, v_2)\Big)^2, \quad (3.5.9)$$

при малом положительном значении Θ.

Функция $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ является сглаженной аппроксимацией целевой функции задачи (3.5.8). Эффект сглаживания иллюстрируют рис. 3.5.2 — 3.5.4, на которых в разном масштабе показаны изолинии для функции (3.5.9) и приведены ее значения в некоторых точках. Здесь было использовано значение $\Theta = 0.01$.

Максимум функции $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ при $\Theta = 0.01$ достигается в точке, для которой $\overline{v}_1 = 8.325815949$, $\overline{v}_2 = 8.348452929$ и $\Phi(\Theta, \overline{p}, \overline{q}) = 8.28158929$. Норма градиента функции $\Phi(\Theta, v_1, v_2)$ в этой точке равна $1.4541 \cdot 10^{-6}$.

Т а б л и ц а 3.5.2a

τ	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{f}$
10^{-1}	$9.1459 \cdot 10^{-3}$	0.956169686	0.014420881	0.020263533	8.058310734
10^{-2}	$9.1515 \cdot 10^{-4}$	0.995611686	$1.4436 \cdot 10^{-3}$	$2.0296 \cdot 10^{-3}$	8.305809423
10^{-3}	$9.1516 \cdot 10^{-5}$	0.999561163	0.000144361	$2.0296 \cdot 10^{-4}$	8.330580921
10^{-4}	$9.1516 \cdot 10^{-6}$	0.999956116	$1.4436 \cdot 10^{-5}$	$2.0296 \cdot 10^{-5}$	8.333058092
10^{-5}	$9.2730 \cdot 10^{-7}$	0.999995508	$1.4740 \cdot 10^{-6}$	$2.0903 \cdot 10^{-6}$	8.333306242
10^{-6}	$1.3369 \cdot 10^{-7}$	0.999998903	$2.8735 \cdot 10^{-7}$	$6.7565 \cdot 10^{-7}$	8.333330906
10^{-7}	$1.5512 \cdot 10^{-8}$	0.999999720	$4.0876 \cdot 10^{-8}$	$2.2400 \cdot 10^{-7}$	8.333333009
Точн. реш.	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 3.5.2b

τ	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	$\overline{\lambda}_3$	$\overline{g}$	$\overline{U}'_{v_1}$	$\overline{U}'_{v_2}$
10^{-1}	0.657125682	0.217912820	0.124961498	8.337816823	−0.419962024	−0.508839261
10^{-2}	0.657393186	0.217761533	0.124845281	8.333377313	−0.437702412	−0.530210918
10^{-3}	0.657395820	0.217760043	0.124844137	8.333333772	−0.439442849	−0.532317980
10^{-4}	0.657395847	0.217760028	0.124844125	8.333333338	−0.439616526	−0.532528351
10^{-5}	0.640002794	0.234666153	0.125331054	8.333333333	−0.405334820	−0.514669428
10^{-6}	0.410689714	0.280293397	0.309016889	8.333333334	−0.130396173	−0.101672713
10^{-7}	0.257461958	0.457547439	0.284990604	8.333333333	0.200085425	0.027528638
Точн. реш.	* * *	* * *	* * *	$\frac{25}{3}$	* * *	* * *

3°. Для получения точного решения в рассматриваемом примере удобнее использовать метод линейной экстраполяции. Поскольку этот метод реализуется по формулам аналогичным рассмотренным ранее (2.4.3), то здесь ограничимся приведением лишь окончательной оценки, дающей $v_1^* = 8.333333333$ и $v_2^* = 8.333333333$. В табл. 3.5.2*a* и 3.5.2*b* показано решение системы (3.5.4) для этих значений v_1 и v_2 при различных значениях параметра τ.

Заметим, что при оптимальных значениях параметров седловыми элементами матрицы (3.5.6) являются элементы D_{12}, D_{22} и D_{32}. Точные решения задач (3.5.1) — (3.5.2) определены однозначно лишь для переменных x_1, x_2, x_3, x_4, f и g.

Данное решение не является решением в чистых стратегиях для задачи (3.5.2). Дело в том, что решение задачи (3.5.1) при оптимальных значениях v_1^* и v_2^*, *переопределено*. То есть число активных ограничений в оптимуме задачи (3.5.1) больше ее размерности.

Решение задачи (3.5.2) в этом случае не единственно. Оптимальными значениями переменных служит произвольный набор неотрицательных чисел λ_1^*, λ_2^*, λ_3^* таких, что $\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = 1$.

Среди этих решений есть три в чистых стратегиях. Одно такое решение с $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 1$, $\lambda_3^* = 0$ показано в табл. 3.5.3*a*, 3.5.3*b* и 3.5.3*c*. Его можно получить, например добавив в систему (3.5.4) неравенство $\lambda_2 \geq 1$. Оно имеет те же значения целевых функций, что и решение в табл. 3.5.2*a* и 3.5.2*b*.

Другие решения в чистых стратегиях, где $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = 0$ и $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 0$, $\lambda_3^* = 1$ находятся аналогично.

Т а б л и ц а 3.5.3a

τ	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{f}$
10^{-15}	0	1	0	1.4500^{-15}	8.333333314
Точн. реш.	0	1	0	0	$\frac{25}{3}$

Т а б л и ц а 3.5.3b

τ	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	$\overline{\lambda}_3$
10^{-15}	$1.6928 \cdot 10^{-8}$	0.999999979	$1.7177 \cdot 10^{-8}$
Точн. реш.	* * *	* * *	* * *

Т а б л и ц а 3.5.3c

τ	$\overline{g}$	$\overline{U}'_{v_1}$	$\overline{U}'_{v_2}$
10^{-15}	8.333333445	0.999999962	$2.4870 \cdot 10^{-10}$
Точн. реш.	$\frac{25}{3}$	* * *	* * *