

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Термин *задача оптимального управления* используется для обозначения задач поиска условного экстремума, возникающих при исследовании объектов, обладающих следующими свойствами:

- *периодичностью*⁴ их математического описания;
- *возможностью разбиения* набора количественных показателей, описывающих каждый период, на два подмножества:
 - показателей *состояния* объекта (или *фазовых переменных*);
 - показателей *управляющих воздействий* (или *управлений*).

При этом состояние объекта для некоторого периода зависит от состояний для других периодов, в то время как управление для каждого из периодов осуществляется *независимо*.

В тех случаях, когда под периодом понимается некоторый момент (или промежуток) времени, задачи данного класса принято называть "*динамическими*".

Наконец, в зависимости от того является ли множество периодов счетным или нет, используются уточняющие класс задачи термины – "*дискретная*" или "*непрерывная*" задача.

⁴ Термин "периодичность" предполагает повторяемость фрагментов модели как во времени, так и в пространстве.

§ 1.1. Дискретные динамические задачи

Рассмотрим N -периодическую модель, описываемую для каждого из периодов $k = [1, N]$ совокупностью

$$\begin{aligned} x(k) &- n\text{-компонентных векторов состояния и} \\ u(k) &- r\text{-компонентных векторов управления,} \end{aligned}$$

удовлетворяющих как системе динамических связей

$$x_i(k+1) = f_{ik}(x(k), u(k)); \quad i = [1, n], \quad k = [1, N-1], \quad (1.1)$$

так и системе смешанных ограничений вида

$$g_{jk}(x(k), u(k)) \geq 0; \quad j = [1, m]; \quad k = [1, N]. \quad (1.2)$$

Для этой модели возможна постановка задачи *оптимального управления*, заключающейся в определении натурального N^* ,

$$\text{а также } x^*(k) \in E^n \quad \text{и} \quad u^*(k) \in E^r \quad (\forall k = [1, N]),$$

доставляющих экстремум функционалу

$$\Phi(x(1), \dots, x(N), u(1), \dots, u(N), N) \quad (1.3)$$

Функции в этих формулах предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам.

Формально задача (1.1)-(1.3) является задачей *математического программирования*, методы решения которой зависят от вида функций входящих в ее условие.

Здесь мы рассмотрим лишь специальный вид задач, называемых задачами *быстродействия* для *линейных* дискретных систем и имеющих следующую формулировку:

найти минимальное число периодов – натуральное N
и соответствующие множества векторов состояний и управлений,
то есть $x(k) \in E^n$ и $u(k) \in E^r$, $k = [1, N]$, которые удовлетворяют

как системе динамических связей

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + c(k), \\ \forall k &= [1, N-1] \end{aligned} \quad (1.4)$$

так и системе ограничений

$$\begin{aligned} D_j(k)x(k) + E_j(k)u(k) + g_j(k) &\geq 0, \\ \forall k &= [1, N], \quad \forall j = [1, m] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Опишем очевидный метод решения задачи (1.4)-(1.5).

Если оказывается, что для некоторого N система (1.4)-(1.5) совместна, то значение пробного числа периодов уменьшается. Если же для данного N устанавливается факт несовместности системы (1.4)-(1.5), то значение N увеличивается и анализ совместности повторяется для нового значения N .

Процесс заканчивается, когда фиксируются два последовательных натуральных числа $N^* - 1$ и N^* , таких, что система (1.4)-(1.5) несовместна для $N^* - 1$ и совместна для N^* . То есть искомое минимальное N^* найдено.

§ 1.2. Непрерывные динамические задачи

Рассмотрим динамический (то есть, способный меняться с течением времени) объект, *состояние* которого в некоторый момент времени $t \in [t_0, T]$ полностью и однозначно описывается упорядоченным набором вектор-функций

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \equiv x(t),$$

значения которых можно считать элементами n -мерного евклидова пространства E^n .

Допустим также, что данный объект является *управляемым*, то есть для каждого момента времени $t \in [t_0, T]$ существует упорядоченный набор вектор-функций

$$\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\} \equiv u(t) \in E^r,$$

определяющих изменение состояния этого объекта.

Будем предполагать, что процесс изменения состояния рассматриваемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.1)$$

причем функции x и u должны в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ удовлетворять системе ограничений

$$g_s(x, u) \geq 0, \quad s = [1, m]. \quad (2.2)$$

Отметим, что как и дискретном случае:

- компоненты вектор-функции $x(t)$ принято называть *фазовыми переменными* или просто – *фазами*, а пространство E^n – *фазовым пространством*;
- компоненты $u(t)$ в этом случае называются *управляющими параметрами* или – *управлениями*, а пространство E^r – *пространством управлений*.

Различие между фазами и управлениями состоит в том, что только производные фаз (по времени) являются левыми частями уравнений (2.1).

Заметим также, что задачи, в которых условия (2.2) содержат как $x(t)$ так и $u(t)$, принято называть *задачами смешанного типа*.

Заметим также, что условия (2.2) не только ограничивают элементы x и u , но и задают зависимость между ними.

Например, наличие в системе условий (2.2) уравнения вида $u = b(x)$ позволяет выбирать управления в зависимости от состояния управляемого объекта. Такого рода ограничения в теории оптимального управления принято называть *обратными связями*.

Для модели (2.1)-(2.2) представляется естественной постановка, так называемой задачи *оптимального управления*:

найти вектор-функции $x^*(t) \in E^n$ и $u^*(t) \in E^r$,
удовлетворяющие условиям (2.1)-(2.2) и
доставляющие экстремум функционалу
$$\Phi(x, u, T). \tag{2.3}$$

Приведем простой пример задачи оптимального управления.

Пусть материальная точка массы m может перемещаться вдоль оси Ox под действием трех сил:

- ограниченной по модулю силы тяги u ,
- диссипативной силы трения $f_{тр} = \mu v$, пропорциональной скорости движения v ,
- и потенциальной силы $f_{упр} = \kappa x$, линейно зависящей от координаты x .

Тогда согласно *второму закону Ньютона* движение точки будет определяться уравнением

$$m w = -\mu v - \kappa x + u ,$$

где w – ускорение точки.

Введем фазовые переменные $x_1 = x$, значение *координаты* точки на оси Ox , и $x_2 = v = \dot{x}_1$ – *скорость движения* точки вдоль оси. Поскольку ускорение точки $w = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$, то для рассматриваемой модели система уравнений (2.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{\kappa}{m}x_1 - \frac{\mu}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

при условиях (2.2): $-c \leq u \leq c$, где c – некоторая положительная константа.

Требуется найти вектор-функции $x^*(t)$ и $u^*(t)$, при которых точка переходит из исходного состояния $x(0) = x^0$ в состояние $x_1 = x_2 = 0$ за *минимально возможное* время T^* .

Задачи оптимального управления с подобным целевым функционалом (как и в дискретном случае) называются задачами *быстродействия*.

Пусть далее, для простоты, упругая сила и сила трения отсутствуют, а масса тела и сила единичные, то есть $m = 1$; $c = 1$; $\kappa = 0$; $\mu = 0$. Тогда мы приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = u, \\ |u| \leq 1. \end{cases}$$

Откуда следует, что фрагменты искомым оптимальных *фазовых траекторий* должны описываться уравнениями

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + d_1, \quad \text{и} \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + d_2,$$

где d_1 и d_2 некоторые константы. Их графики показаны на рис. 2.0.

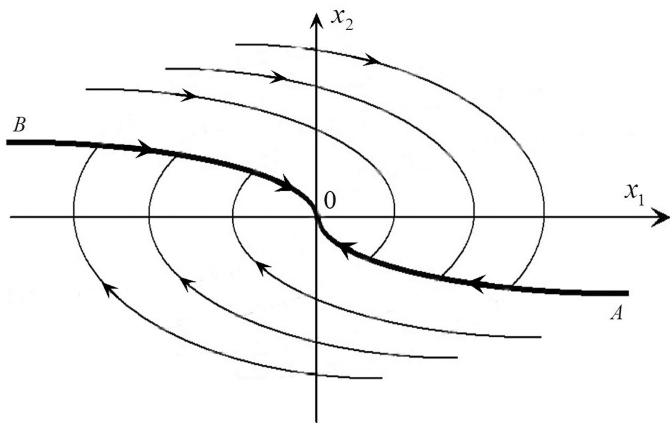


Рис. 2.0.

Нетрудно убедиться, что решением рассматриваемой задачи быстрого действия является кусочно-гладкая траектория, состоящая из двух отрезков квадратных парабол. При этом вначале делается переход по серой параболе до пересечения с черной, а затем по черной параболе выполняется переход в начало координат (см. рис. 2.0).

Оптимальная функция управления u является *кусочно-постоянной*, равной -1 для серых парабол выше BOA и равной 1 для серых парабол, которые ниже этой линии.

Наконец, на OA функция u равна -1 , на BO равна 1 , а в начале координат она равна нулю. Другими словами, линия BOA есть линия переключения силы тяги с максимально тормозящей на максимально разгоняющую (и наоборот).

Поскольку для каждой точки фазовой плоскости, не принадлежащей BO или на AO , существует только одно решение задачи Коши, то мы приходим к следующему правилу построения оптимальной по быстродействию траектории.

Пусть x^0 начальная точка на фазовой плоскости. Тогда

- А) Если точка x^0 расположена *ниже* линии AOB , то вначале движение осуществляется из этой точки по траектории принадлежащей семейству с $u = 1$ до момента попадания на дугу BO в некоторой точке x^1 . Затем при $u = -1$ выполняется переход по BO из x^1 в начало координат.
- В) Если же x^0 расположена *выше* AOB , то движение сначала осуществляется по траектории из семейства с $u = -1$ до момента попадания на дугу OA . Затем с $u = 1$ переходим по OA в начало координат.
- С) Наконец, если x^0 принадлежит BO (или же OA), то переходим из x^0 непосредственно в начало координат по дуге BO с $u = 1$ (по OA при $u = -1$).

Кроме того, можно доказать, что использование правил А)-В)-С) не только необходимо, но и достаточно для оптимальности построенной траектории.

В вычислительной практике решения задач оптимального управления можно находить различными способами.

Рассмотрим для примера схему решения задачи (2.1)-(2.2), основанную на идее *дискретизации времени* в линейных непрерывных задачах оптимального управления.

Пусть в линейном случае задача (2.1)-(2.2) формулируется, например, так

$$\text{максимизировать по } \{x(t), u(t)\} \int_0^T [(c(t), x(t)) + (f(t), u(t))] dt,$$

$$\text{при условиях: } \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ D(t)x + E(t)u &\geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где зависящие от времени матрицы $A(t), B(t), C(t), D(t)$ и вектор-функции $x(t), u(t), c(t), f(t)$ имеют соответствующие размеры.

Тогда дискретизация времени может быть выполнена по очевидным формулам

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad x^k = x(k \Delta t), \quad u^k = u(k \Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где N – полное число периодов. В выражениях для производных значения дифференциалов заменяются на *приращения* функций.

Тогда задача (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать по } \{x^k, u^k\} \sum_{k=0}^N ((c^k, x^k) + (f^k, u^k)), \\ & \text{при условиях} \quad x^{k+1} - x^k = A^k x^k \Delta t + B^k u^k \Delta t, \\ & \quad \quad \quad D^k x^k + E^k u^k \geq o, \quad \forall k \in [0, N-1]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Задача (2.4) является обычной задачей линейного программирования, но сравнительно *высокой размерности*.

Проиллюстрируем использование метода дискретизации времени в непрерывной задаче с динамическими связями (2.4) вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - u_1 + 2u_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Рассмотрим вначале классическую задачу Коши при начальных условиях $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$. В случае, когда матрица $B(t)$ нулевая,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Для дискретизации здесь и далее будем использовать значения параметров: $T = 7.5$, $\Delta t = 0.01$, $N = 750$.

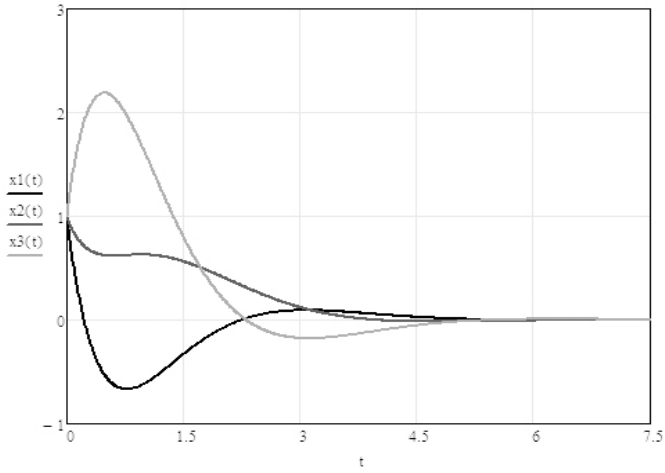


Рисунок 2.1.

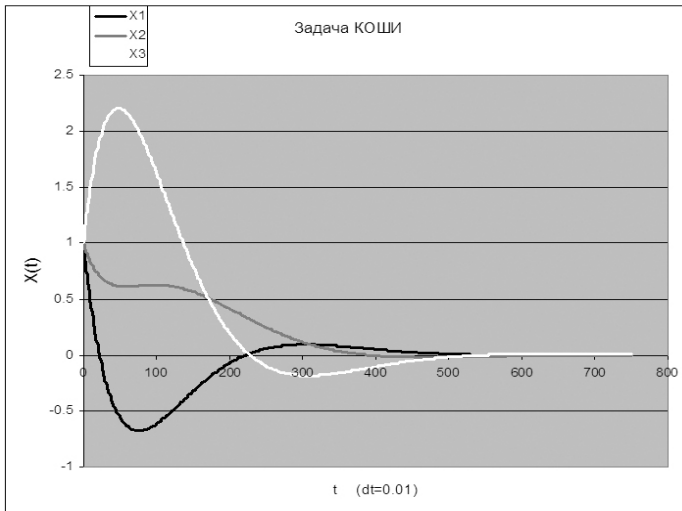


Рисунок 2.2.

Вначале рассмотрим задачу без управлений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

Общее решение этой однородной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2 \sin t \end{pmatrix},$$

причем заданные начальные значения фазовых переменных получаются при $C_1 = 3$ и $C_2 = C_3 = -2$. Графики решений задачи Коши приведены на рис. 2.1.

Использование схемы дискретизации времени для этой задачи дает аналогичные результаты, показанные на рис. 2.2.

В заключение приведем решения трех вариантов задачи *оптимального управления* (2.5), в которых начальные условия и ограничения на управления одинаковы

$$\begin{aligned}x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1; \\ |u_1(t)| \leq 1; \quad |u_2(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T],\end{aligned}$$

но имеются различия в ограничениях на фазовые переменные.

В первом варианте требуется найти оптимальные управления при граничном условии $x_1(T) \rightarrow \max$. Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис.2.3 и 2.4.

Для второго варианта граничные условия на фазовые переменные имели вид $x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 0.2$. Графики соответствующих оптимальных решений показаны на рис.2.5 и 2.6.

Третий вариант получается из первого тем, что к краевому ограничению $x_1(T) \rightarrow \max$ добавлены ограничения на фазовые переменные

$$x_1(t) \geq -0.5, \quad x_2(t) \geq -0.5, \quad x_3(t) \geq -0.5, \quad \forall t \in [0, T].$$

Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис.2.7 и 2.8.

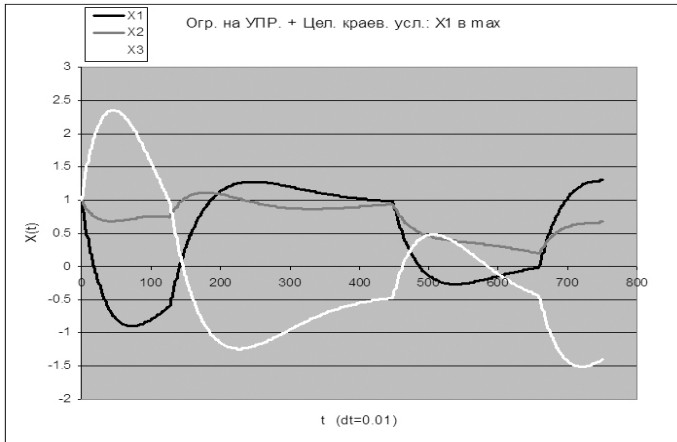


Рисунок 2.3.

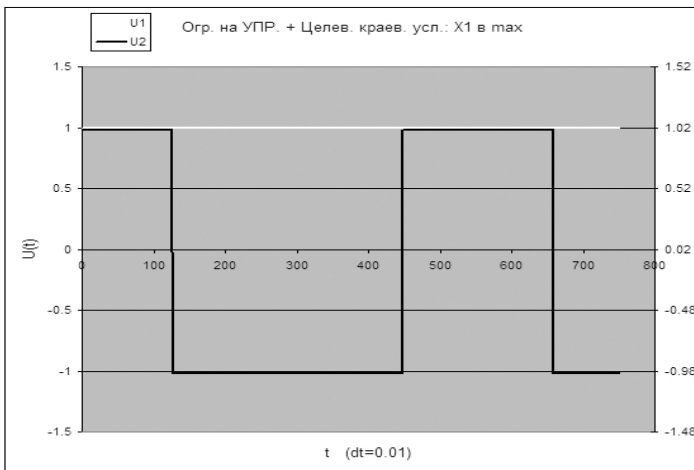


Рисунок 2.4.

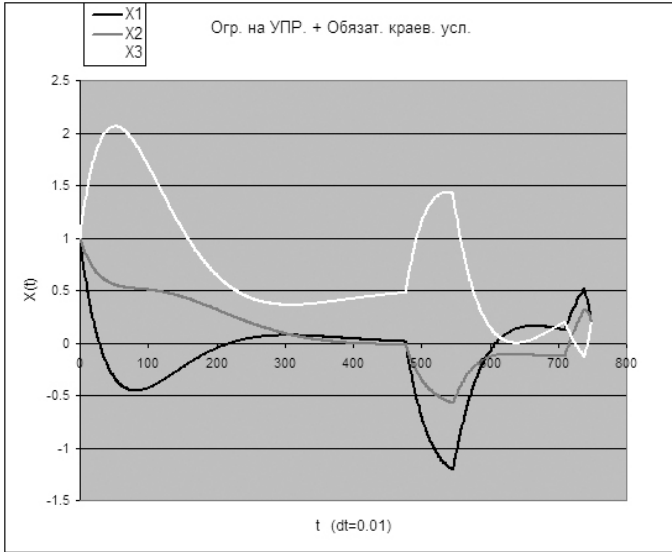


Рисунок 2.13.

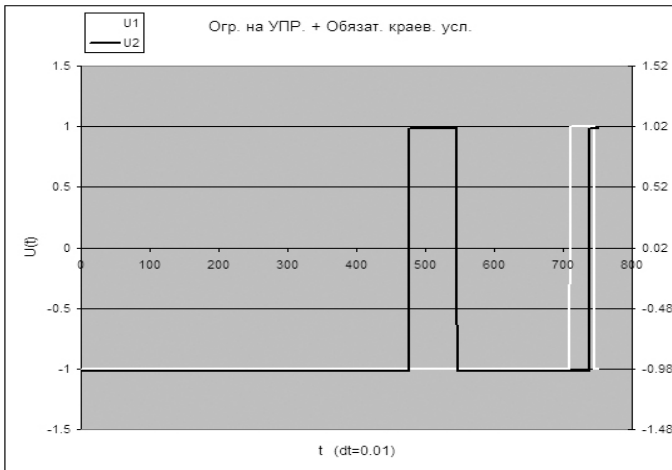


Рисунок 2.6.

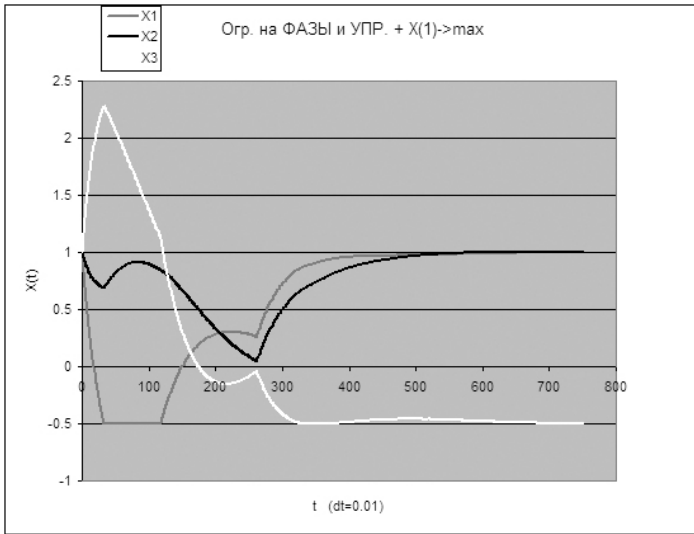


Рисунок 2.7.

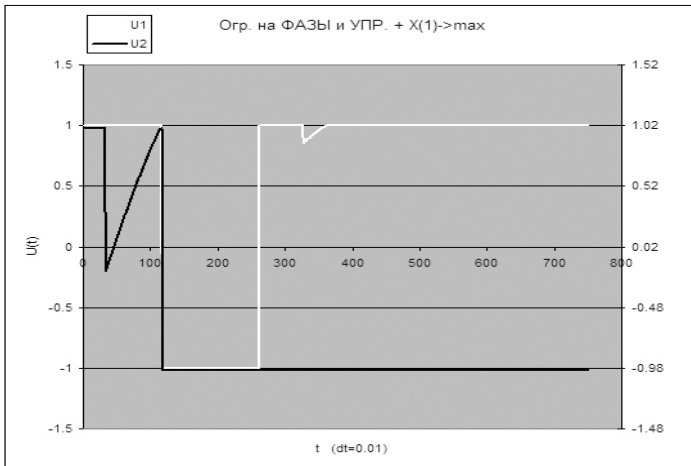


Рисунок 2.8.

В заключение приведем без доказательства важное утверждение, что

при отсутствии ограничений на фазовые переменные управления находятся на своих граничных значениях, за исключением, быть может, точек «переключения».

Этот факт иллюстрируют рис. 2.4, 2.6. и 2.8, на первых двух из них управляющие переменные имеют лишь свои *граничные значения* $\forall t \in [0, T]$.

В то время как для третьего варианта (с ограничениями на фазовые переменные) имеются интервалы времени, на которых оптимальные управления *не находятся на своих границах*.