*Верс. 03ноя2025г.*

# Модель анализа эффективности инвестиций на рынке ценных бумаг

В качестве примера рассмотрим применение параметрической линеаризации в задаче дискретного оптимального управления с ограничениями как на фазовые переменные, так и на управления. Данная задача была сформулирована для математической модели оценки качества управления инвестиционной деятельностью на рынке ценных бумаг.

Отметим, что эта модель относится к классу *неполных* математических моделей. То есть математических моделей, в которых корректно учтены *не все* факторы, существенно влияющие на функционирование моделируемого объекта.

Причиной неполноты модели служат как не полный объем достоверной информации об объекте, так и принципиальная невозможность адекватной формализации всех существенных факторов. К последним можно отнести, например, человеческий фактор, политические риски, случайные события, причинно-следственные неопределенности и т.п.

Эта неполнота модели приводит к необходимости изменения постановок решаемых задач.

Действительно, любое пополнение модели, претендующей на адекватность описания объекта, может привести к тому, что оптимальное решение станет недопустимым, а имитационный прогноз окажется неверным.

Поэтому вопросы типа, «Каково оптимальное значение критерия качества, если...?» или «Что произойдет, если...?» приходится заменять на вопросы «Какие значения критерия качества не достижимы, если...?» или «Чего не произойдет, если...?» Поскольку очевидно, что при таких заменах любое пополнение модели новыми условиями не может превратить, например, недопустимое решение в допустимое.

Для целей нашего курса будет достаточно частного случая этой модели, где рассматривается следующая операция на рынке ценных бумаг.

В течении $N$ периодов (например, банковских дней) приобретается и продается определенный вид ценных бумаг с известной доходностью. Оплата приобретения бумаг осуществляется заемными средствами, привлекаемыми по кредитной линии.

Доходность ценных бумаг и стоимость кредита для каждого из периодов постоянны, но могут различаться в разных периодах.

Максимальные объемы привлекаемых (или возвращаемых) средств по кредитной линии за один период, равно как и объемы приобретаемых (или продаваемых) ценных бумаг в течение одного периода, ограничены.

Предполагается, что объем портфеля ценных бумаг и задолженность по кредиту равны нулю как в начале операции, так при ее окончании.

Требуется оценить максимальную эффективность операции по величине остатка счета операции на момент ее завершения, если число периодов операции фиксировано.

Необходимо также рассчитать динамику привлечения–возврата заемных средств, равно как и приобретения–продаж ценных бумаг, обеспечивающую эту эффективность. Функциональная схема операции показана на рис. 4.3.1.

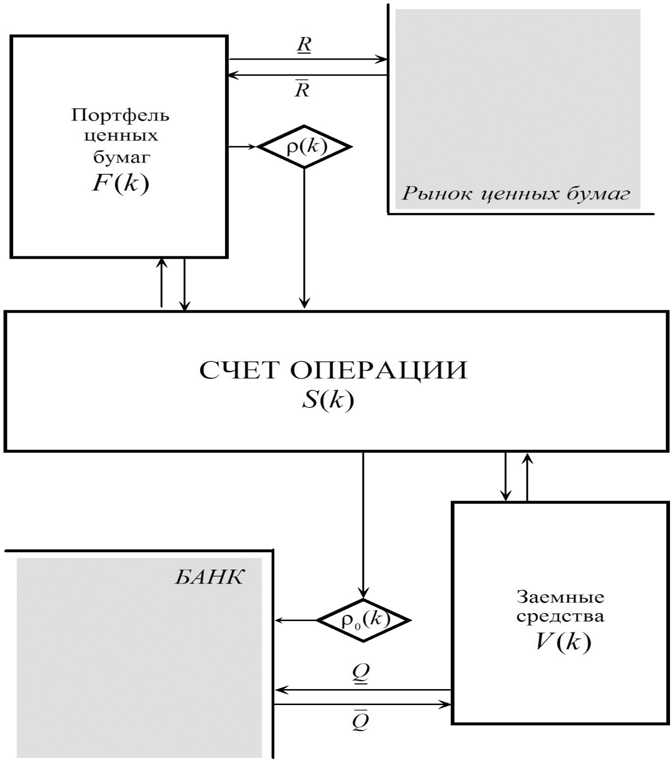


Рис. 4.3.1. Функциональная схема инвестиционной операции на рынке ценных бумаг

Для формализованного описания исследуемой операции используем для каждого из периодов $k = \overline{0, N}$ следующие показатели:

$S(k)$ – текущий остаток средств на счете операции,
$Q(k)$ – объем средств, привлеченных (или возвращенных),
$R(k)$ – стоимость ценных бумаг, купленных (или проданных),
$F(k)$ – объем портфеля ценных бумаг,
$V(k)$ – величина задолженности по кредиту,
$\rho_0(k)$ – процентная ставка по кредиту,
$\rho(k)$ – доходность ценных бумаг.

Эти характеристики будут связаны следующими динамическими соотношениями для каждого $k = \overline{0, N-1}$:

1°. Динамика счета операции:

$$S(k+1) = S(k) + Q(k) - R(k) + \rho(k) \cdot F(k) - \rho_0(k) \cdot V(k) \ , \qquad (4.3.8)$$

2°. Динамика объема портфеля ценных бумаг:

$$F(k+1) = F(k) + R(k) \ ,$$

3°. Динамика задолженности по кредиту:

$$V(k+1) = V(k) + Q(k) \ .$$

Согласно принятой для динамических задач терминологии в данной системе разностных уравнений переменные $S$, $F$ и $V$ являются *фазовыми переменными*, а $\rho$, $\rho_0$, $Q$ и $V$ — *управлениями*.

На фазовые переменные и управления при этом накладываются следующие ограничения:

— $S(k) \geq 0 \quad k = \overline{1,N}$, то есть в ходе операции овердрафт по счету операции не допускается;

— $F(k) \geq 0$ и $V(k) \geq 0 \quad k = \overline{1,N}$, которые очевидны;

— управления $R(k)$ и $Q(k)$ произвольны по знаку и должны удовлетворять двусторонним неравенствам, отражающими как технические, так и финансово-экономические ограничения (например, на ликвидность ценных бумаг):

$$\underline{Q}(k) \leq Q(k) \leq \overline{Q}(k) \quad \text{и} \quad \underline{R}(k) \leq R(k) \leq \overline{R}(k) \qquad k = \overline{1,N}\,;$$

— начальные условия: $S(0) = V(0) = F(0) = 0$, равно как и конечные условия: $V(N) = F(N) = 0$, вытекают из условий проведения операции.

Наконец, целевое условие операции имеет вид: $S(N) \longrightarrow \max$.

Данная совокупность обязательных и желательных условий формально является задачей нелинейного программирования, в которой показатели

$$S(k),\ F(k),\ V(k),\ \rho(k),\ \rho_0(k),\ R(k),\ Q(k) \qquad k = \overline{1,N}$$

являются переменными, а число периодов $N$ и величины

$$\underline{Q}(k),\ \overline{Q}(k),\ \underline{R}(k),\ \overline{R}(k), \qquad k = \overline{1,N}$$

– параметрами, причем величины $S(k)$, $F(k)$, $V(k)$ имеют размерность «у. е.», величины $R(k)$, $\underline{R}(k)$, $\overline{R}(k)$, $Q(k)$, $\underline{Q}(k)$ и $\overline{Q}(k)$ измеряются в «у. е./период», а $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ – безразмерные.

В этой модели очевидно не учтен ряд существенных, но неформализуемых факторов (например, таких как внешние экономические и политические условия, человеческий фактор, а также различные риски, обусловленные нестабильностью рынка ценных бумаг или стоимостью кредита). Поэтому ее следует отнести к классу неполных моделей, позволяющих получить лишь маргинальную (крайнюю верхнюю) оценку максимально возможной эффективности рассматриваемой операции.

Несложно заметить, что *нелинейные* условия (4.3.8) становятся линейными, если переменные $\rho_0(k)$, $\rho(k)$ $\quad k = \overline{1,N}$ превратить в параметры. То есть для решения задачи можно использовать процедуру двухуровневой параметрической линеаризации.

Предположим, что параметры в линеаризованной задаче имеют следующие значения: $N = 300$ и

$$\begin{array}{lcrlcll} \underline{Q}(k) & = & -20.00, & \overline{Q}(k) & = & 40.00, & \\ \underline{R}(k) & = & -50.00, & \overline{R}(k) & = & 40.00, & \\ \rho_0(k) & = & 0.004, & \rho(k) & = & 0.008 & k = \overline{1,N}. \end{array} \qquad (4.3.9)$$

Численные результаты расчетов, получены стандартным симплекс-алгоритмом. На рис. 4.3.2 и рис. 4.3.3 приведены графики фазовых переменных и управлений, представляющие оптимальную динамику их значений, обеспечивающую максимизацию[1] остатка средств на счете операции при ее завершении.

[1]В предположении адекватности используемой *неполной* модели.

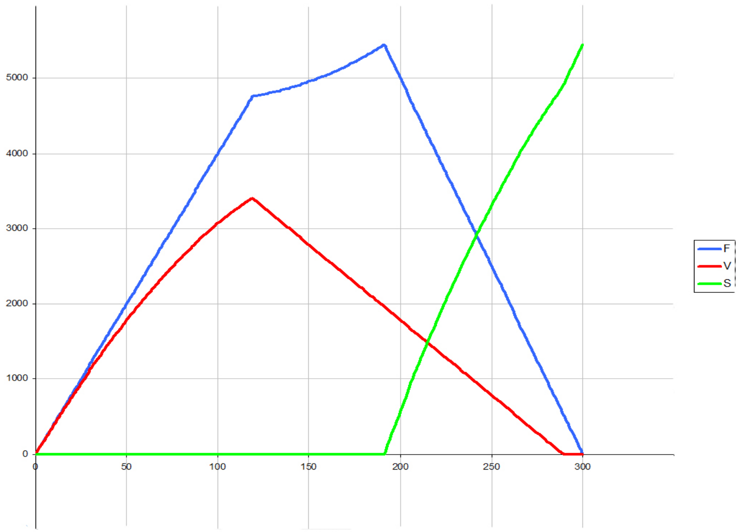


Рис. 4.3.2. Оптимальная динамика *фазовых* переменных в задаче (4.3.9)

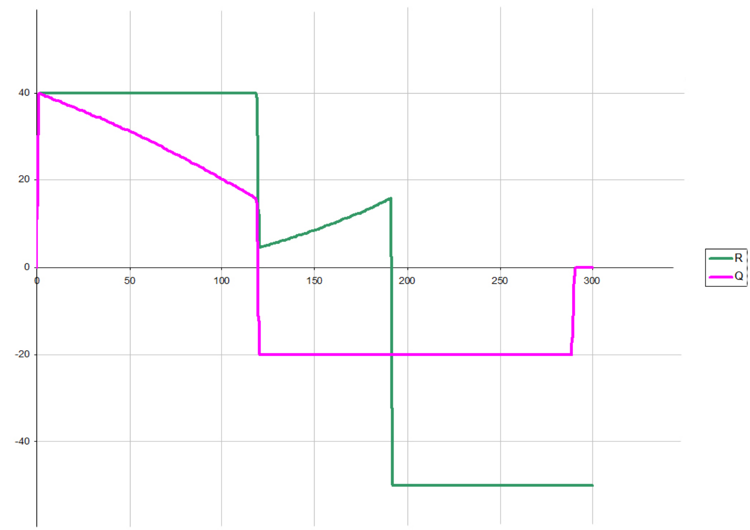


Рис. 4.3.3. Оптимальная динамика переменных-*управлений* в задаче 4.3.9

Описание оптимальной динамики фазовых переменных и управлений удобно выполнить, разделив множество всех периодов на четыре группы.

Периоды $1 \leq k \leq 120$.

Для первой группы периодов происходит увеличение объема портфеля ценных бумаг $F$ с максимально возможной скоростью. Величина управления $R$ находится на верхней границе его допустимых значений. Покупка бумаг осуществляется как за счет привлекаемых заемных средств, так и реинвестирования дивидендов от уже приобретенных бумаг. По мере роста объема портфеля скорость привлечения заемных средств $Q$ снижается, хотя и остается положительной. Остаток средств на счете операции $S$ для данной группы периодов нулевой.

Периоды $121 \leq k \leq 191$.

В этой группе периодов начинается возврат привлеченных заемных средств. Снижение текущего объема задолженности $V$ осуществляется с максимально возможной скоростью. Значение соответствующего управления $Q$ отрицательно и находится на своей нижней границе. На этом этапе рост портфеля ценных бумаг продолжается, но со скоростью меньшей, чем допустимый максимум. Дивиденды тратятся в первую очередь на возврат займа. Остальные реинвестируются в ценные бумаги.

Периоды с $192 \leq k \leq 291$.

В этой группе периодов происходит продажа ценных бумаг. Объем портфеля уменьшается с максимально возможной скоростью. Это необходимо для выполнения краевого условия: $F(N) = 0$. Значения обоих управлений находятся на своих нижних допустимых границах. Средства, получаемые от реализации ценных бумаг, и дивиденды от остающейся части портфеля аккумулируются на счете операции. Остаток счета операции $S$ растет.

Периоды $292 \leq k \leq 300$.

К началу этой группы периодов объем задолженности становится равным нулю. Управление $Q$ принимает нулевое значение. Скорость роста остатка на счете операции увеличивается.

Важно отметить, что полученная оценка максимальной эффективности операции является *маргинальной, верхней оптимистичной.* Действительно, добавление в неполную модель каких-то уточняющих модель ограничений множество допустимых состояний расширить не может. Значит, никакое улучшение модели не приводит к увеличению оценки эффективности.

Из рис. 4.3.2—4.3.3 видно, что графики как фазовых переменных, так и управлений имеют *нелинейные* участки.

Для определения вида этих нелинейностей используем непрерывную аппроксимации дискретных зависимостей функциями $S(t)$, $F(t)$, $V(t)$, $R(t)$ и $Q(t)$ для значений $t \in [0, T]$.

Пусть конец $k$-го периода совпадает с моментом $t = k$. Тогда $T = N$ и система разностных уравнений (4.3.8) (1°—3°) может быть аппроксимирована системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{F} = R\,, \\ \dot{V} = Q\,, \\ \dot{S} = \rho F - \rho_0 V - R + Q \end{cases} \tag{5.1.1}$$

при условиях:

$$F(0) = V(0) = S(0) = 0\,; \qquad F(T) = V(T) = 0\,;$$

$$F(t) \geq 0\,, \quad V(t) \geq 0\,, \quad S(t) \geq 0,$$

$$\underline{R} \leq R(t) \leq \overline{R}\,, \qquad \underline{Q} \leq Q(t) \leq \overline{Q} \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Целевой функционал будет иметь вид: $S(T) \longrightarrow \max\,.$

Рассмотрим первую группу периодов. Здесь мы имеем

$$S(t) = 0\,; \quad R(t) = \overline{R} \quad \Longrightarrow \quad F(t) = \overline{R}t\ .$$

Поэтому система (5.1.1) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \dot{V} = Q\,, \\ \\ 0 = \rho\overline{R}\,t - \rho_0 V - \overline{R} + Q\,, \end{cases}$$

что приводит к *задаче Коши* для $V(t)$:

$$\dot{V} = \rho_0 V - \rho\overline{R}\,t + \overline{R}, \qquad \mathrm{V(0)=0},$$

Ее решением является функция

$$V(t) = \alpha \exp(\rho_0 t) + \beta t + \gamma\,,$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ суть некоторые однозначно определяемые константы.

Рассмотрим теперь вторую группу периодов. Предположим, что первая группа завершилась в момент времени $t_1$. Пусть $V(t_1) = V_1$ и $F(t_1) = F_1$. Тогда для второй группы имеем

$$S(t) = 0\,; \;\; Q(t) = \underline{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = V_1 + \underline{Q}(t - t_1)\,.$$

Откуда

$$\begin{cases} \dot{F} = R\,, \\ \\ 0 = \rho F - \rho_0 \Big( V_1 + \underline{Q}(t - t_1) \Big) - R + \underline{Q}\,. \end{cases}$$

И мы получаем задачу Коши для $F(t)$ :

$$\dot{F} = \rho F - \rho_0 \Big( V_1 + \underline{Q}(t - t_1) \Big) + \underline{Q}\,, \qquad F(t_1) = F_1.$$

Ее решением будут

$$F(t) = \kappa \, \exp(\rho\, t) + \lambda\, t + \mu \qquad \text{и} \qquad R(t) = \kappa\, \rho \, \exp(\rho\, t) + \lambda\,,$$

где $\kappa$, $\lambda$ и $\mu$ суть однозначно определяемые константы.

Наконец, рассмотрим третью[2] группу периодов. Пусть вторая группа завершается в момент времени $t_2$ со значениями $V(t_2) = V_2$ и $F(t_2) = F_2$. Для третьей группы имеем

$$Q(t) = \underline{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\,,$$

$$R(t) = \underline{R} \qquad \Longrightarrow \qquad F(t) = F_2 + \underline{R}(t - t_2)\,.$$

Тогда система (5.1.1) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{F} = \underline{R}\,, \\ \dot{V} = \underline{Q}\,, \\ \dot{S} = \rho\Big(F_2 + \underline{R}(t - t_2)\Big) - \rho_0\Big(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\Big) - \underline{R} + \underline{Q}\,. \end{cases}$$

Окончательно мы получаем задачу Коши

$$\dot{S} = \rho\Big(F_2 + \underline{R}(t - t_2)\Big) - \rho_0\Big(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\Big) - \underline{R} + \underline{Q}\,, \qquad S(t_2) = 0\,.$$

Ее решением является функция

$$F(t) = \sigma t^2 + \theta t + \nu,$$

где $\sigma, \theta$ и $\nu$ суть однозначно определяемые константы.

Здесь нетрудно заметить, например, что

$$\sigma = \frac{\rho\underline{R} - \rho_0\underline{Q}}{2} \leq 0\,.$$

[2] Исследование четвертой группы полностью аналогично исследованию третьей.

# Метод параметрической линеаризации. Решение задачи верхнего уровня

Рассмотрим теперь случай, когда доходность ценных бумаг и стоимость кредита не являются постоянными, а определяются формулами:

$$\rho(k) = \begin{cases} A\,, & k < K\,, \\ B\,, & K \le k \le K + \Delta\,, \\ A\,, & k > K + \Delta \end{cases}$$

и (4.3.10)

$$\rho_0(k) = \begin{cases} A_0\,, & k < K_0\,, \\ B_0\,, & K_0 \le k \le K_0 + \Delta_0\,, \\ A_0\,, & k > K_0 + \Delta_0\,, \end{cases}$$

то есть функции $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ являются кусочно-постоянными при постоянных $A$, $B$, $A_0$, $B_0$, $\Delta$ и $\Delta_0$.

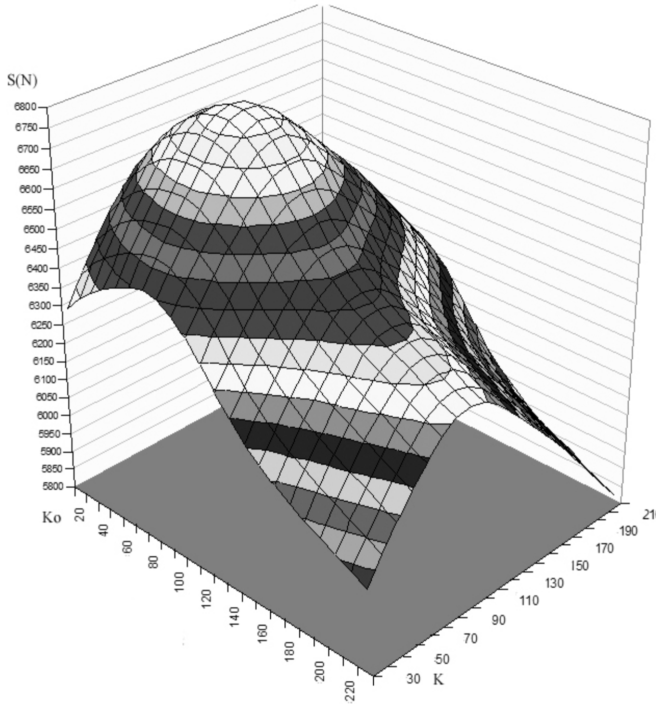


Рис. 4.3.4. 3D-представление решения задачи (4.3.10)

Решаемая задача заключается в анализе (при помощи сформулированной выше модели) зависимости $S_{K,K_0}(N)$. То есть маргинальной оценки величины остатка средств на счете операции при ее завершении от моментов скачков доходности и стоимости кредита на рынке ценных бумаг.

Таким образом, задача верхнего уровня является нелинейной и сводится к построению описания зависимости $S(N)$ от $K$ и $K_0$. А поскольку ее размерность невелика, то для решения возможно использование перебора по сетке значений аргументов с постоянным шагом.

При решении были использованы следующие значения параметров:

$$A = 0.008,\ B = 0.01,\ A_0 = 0.004,\ B_0 = 0.006.$$

При этом выбирались значения $N = 300$, $\Delta = \Delta_0 = 50$ с параметрами двумерной сетки $30 \leq K \leq 220$, $20 \leq K_0 \leq 230$, причем величина шага по сетке равнялась 10.

Графическое представление зависимости $S_{K,K_0}(N)$ показано на рис. 4.3.4.

Из качественного анализа полученных результатов следует, что в случае нестабильности рынка ценных бумаг, проявляющейся в скачке дохода, существует реакция рынка кредитных линий, заключающаяся в скачке стоимости кредита, при которой достигается максимальная эффективность операции.