Верс. 23мар2026г.

Исследование эффективности инвестиций на рынке ценных бумаг

В качестве примера исследования операций рассмотрим оценку эффективности инвестиционной деятельности на рынке ценных бумаг.

Этот пример состоит в решении серии задач *дискретного оптимального управления* с ограничениями как на фазовые переменные, так и на управления.

Отметим, что эти задачи формулируются для математической модели относящейся к классу *неполных* моделей. То есть содержащих в своей формулировке *лишь те* существенные факторы, для которых имеются *адекватные* формализованные описания.

Причиной неполноты данной модели служат как неполный объем достоверной информации об объекте исследования, так и принципиальная невозможность адекватной формализации некоторых факторов, могущих оказаться существенными.

К последним отнесятся, например, человеческий фактор, политические риски, случайные события, причинно-следственные неопределенности и т.п.

Отмеченная неполнота модели приводит к необходимости изменения стандартных постановок решаемых задач.

Известно, что любое пополнение модели, претендующей на адекватность описания объекта, может привести к тому, что оптимальное решение станет недопустимым, а имитационный прогноз окажется неверным.

Поэтому вопросы типа, «*Каково оптимальное значение критерия качества, если...?*» или «*Что произойдет, если...?*» следует заменить на вопросы «*Какие значения критерия качества не достижимы, если...?*» или «*Что не произойдет, если...?*» Поскольку очевидно, что при таких заменах любое пополнение модели новыми условиями не может превратить недопустимое решение в допустимое.

Для целей нашего курса будет достаточно простого варианта модели, которая описывает следующую операцию на рынке ценных бумаг.

В течении N периодов (например, банковских дней) приобретаются и продаются ценные бумаги обладающие доходностью. Оплата приобретения бумаг осуществляется заемными средствами, привлекаемыми по кредитной линии.

Доходность ценных бумаг и стоимость кредита для каждого из периодов постоянны, но могут различаться в разных периодах.

Максимальные объемы привлекаемых (или возвращаемых) средств по кредитной линии за один период, равно как и объемы приобретаемых (или продаваемых) ценных бумаг в течение одного периода, ограничены.

Предполагается, что объем портфеля ценных бумаг и задолженность по кредиту равны нулю как в начале операции, так при ее окончании.

Требуется оценить максимальную эффективность операции по величине остатка денежных средств на счете операции в момент ее завершения.

Число периодов проведения операции N известно и фиксировано.

Необходимо также найти динамику привлечения—возврата заемных средств, равно как и приобретения—продажи ценных бумаг, обеспечивающую оптимальную эффективность всей операции.

Функциональная схема операции показана на рис. 1.

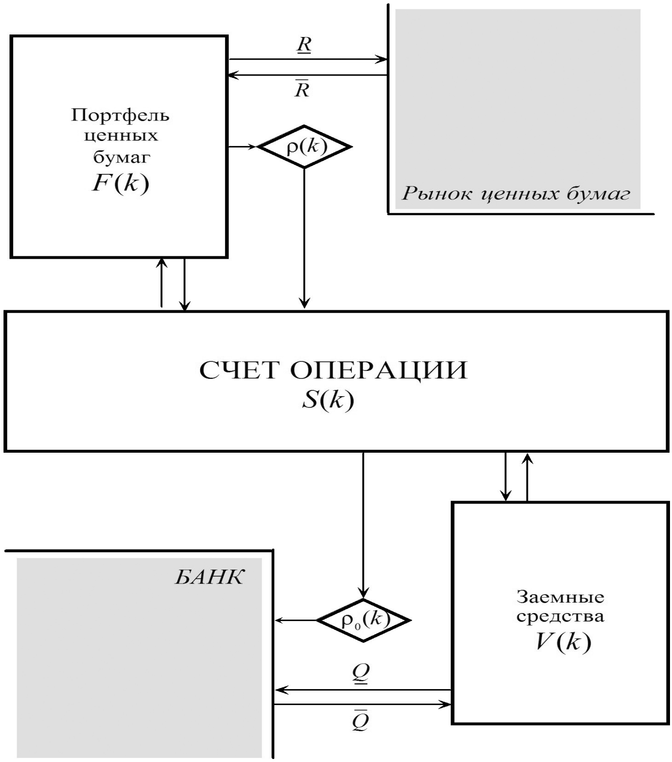

Рис. 1. Функциональная схема инвестиционной операции на рынке ценных бумаг

Для описания исследуемой операции в модели используются в каждом из периодов $k = \overline{0, N}$ следующие количественные показатели:

$S(k)$ – остаток средств на счете операции в конце периода,
$Q(k)$ – объем средств, привлеченных (или возвращенных) за период,
$R(k)$ – стоимость ценных бумаг, купленных (или проданных) за период,
$F(k)$ – объем портфеля ценных бумаг в конце периода,
$V(k)$ – величина задолженности по кредитной линии в конце периода,
$\rho_0(k)$ – процентная ставка по кредиту ,
$\rho(k)$ – доходность ценных бумаг.

Эти характеристики связаны следующими динамическими соотношениями для каждого $k = \overline{0, N-1}$:

1°. Динамика счета операции:

$$S(k+1) = S(k)+Q(k)-R(k)+\rho(k)\cdot F(k)-\rho_0(k)\cdot V(k)\ , \quad (1)$$

2°. Динамика объема портфеля ценных бумаг:

$$F(k+1) = F(k) + R(k)\ ,$$

3°. Динамика задолженности по кредиту:

$$V(k+1) = V(k) + Q(k)\ .$$

Согласно принятой для динамических задач терминологии, в данной системе разностных уравнений переменные S, F и V являются *фазовыми переменными*, а ρ, ρ_0, Q и V — *управлениями.*

На фазовые переменные и управления при этом накладываются следующие ограничения:

— $S(k) \geq 0 \quad k = \overline{1, N},$ то есть в ходе операции овердрафт (задолженность) по счету операции не допускается;

— $F(k) \geq 0$ и $V(k) \geq 0 \quad k = \overline{1, N},$ которые очевидны;

— управления $R(k)$ и $Q(k)$ произвольны по знаку и должны удовлетворять двусторонним неравенствам, отражающими как технические, так и финансово-экономические ограничения

$$\underline{Q}(k) \leq Q(k) \leq \overline{Q}(k) \quad \text{и} \quad \underline{R}(k) \leq R(k) \leq \overline{R}(k) \qquad k = \overline{1, N}\,;$$

— начальные условия: $S(0) = V(0) = F(0) = 0$, равно как и конечные условия: $V(N) = F(N) = 0$, вытекают из условий проведения операции.

Наконец, целевое условие операции имеет вид: $\quad S(N) \longrightarrow \max.$

Данная совокупность обязательных и желательных условий формально является задачей нелинейного программирования, в которой показатели

$$S(k),\, F(k),\, V(k),\, \rho(k),\, \rho_0(k),\, R(k),\, Q(k) \qquad k = \overline{1, N}$$

являются переменными, а число периодов N и величины

$$\underline{Q}(k),\, \overline{Q}(k),\, \underline{R}(k),\, \overline{R}(k), \qquad k = \overline{1, N}$$

– параметрами.

Величины $S(k)$, $F(k)$, $V(k)$ имеют размерность «денежная условная единица», величины $R(k)$, $\underline{R}(k)$, $\overline{R}(k)$, $Q(k)$, $\underline{Q}(k)$ и $\overline{Q}(k)$ измеряются в «денежных условных единицах за период», а $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ – безразмерные.

Очевидно, что в этой модели не учтен ряд существенных, *неформализуемых* факторов (например, таких как внешние экономические и политические условия, человеческий фактор, а также различные риски, обусловленные нестабильностью рынка ценных бумаг или стоимости кредита).

Поэтому ее следует отнести к классу неполных моделей, позволяющих получить лишь маргинальную (крайнюю верхнюю) оценку максимально возможной эффективности рассматриваемой операции.

Наконец, несложно заметить, что *нелинейные* условия (1) становятся линейными, если переменные $\rho_0(k)$, $\rho(k) \quad k = \overline{1, N}$ превратить в параметры. То есть для решения задачи можно использовать процедуру *двухуровневой параметрической линеаризации.*

Пусть в линеаризованной задаче используются следующие значения констант: $N = 300$ и

$$
\begin{array}{rcrrcrl}
\underline{Q}(k) & = & -20.00, & \overline{Q}(k) & = & 40.00, & \\
\underline{R}(k) & = & -50.00, & \overline{R}(k) & = & 40.00, & \\
\rho_0(k) & = & 0.004, & \rho(k) & = & 0.008 & k = \overline{1, N}.
\end{array} \qquad (2)
$$

Результаты расчетов получены стандартным симплекс-алгоритмом.

На рис. 2 и рис. 3 приведены графики зависимостей фазовых переменных и управлений от номера периода, представляющие оптимальную динамику их значений, обеспечивающую максимизацию остатка средств на счете операции при ее завершении.

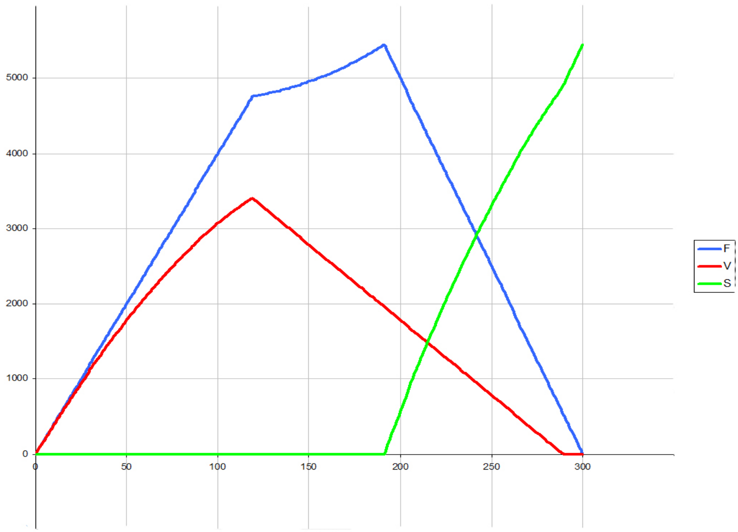

Рис. 2. Оптимальная динамика *фазовых* переменных в задаче (2)

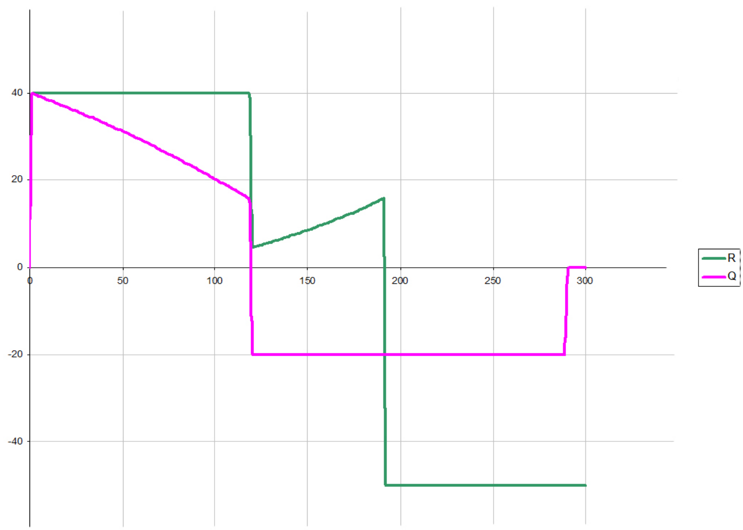

Рис. 3. Оптимальная динамика переменных-*управлений* в задаче (2)

Описание оптимальной динамики фазовых переменных и управлений удобно выполнить, разделив множество всех периодов на четыре группы.

Периоды $1 \le k \le 120$.

Для первой группы периодов происходит увеличение объема портфеля ценных бумаг F с максимально возможной скоростью. Величина управления R находится на верхней границе его допустимых значений. Покупка бумаг осуществляется как за счет привлекаемых заемных средств, так и реинвестирования дивидендов от уже приобретенных бумаг. По мере роста объема портфеля скорость привлечения заемных средств Q снижается, хотя и остается положительной. Остаток средств на счете операции S для данной группы периодов нулевой.

Периоды $121 \le k \le 191$.

В этой группе периодов начинается возврат привлеченных заемных средств. Снижение текущего объема задолженности V осуществляется с максимально возможной скоростью. Значение соответствующего управления Q отрицательно и находится на своей нижней границе. На этом этапе рост портфеля ценных бумаг продолжается, но со скоростью меньшей, чем допустимый максимум. Дивиденды тратятся в первую очередь на возврат займа. Остальные реинвестируются в ценные бумаги.

Периоды с $192 \le k \le 291$.

В этой группе периодов происходит продажа ценных бумаг. Объем портфеля уменьшается с максимально возможной скоростью. Это необходимо для выполнения краевого условия: $F(N) = 0$. Значения обоих управлений находятся на своих нижних допустимых границах. Средства, получаемые от реализации ценных бумаг, и дивиденды от остающейся части портфеля аккумулируются на счете операции. Остаток счета операции S растет.

Периоды $292 \le k \le 300$.

К началу этой группы периодов объем задолженности становится равным нулю. Управление Q принимает нулевое значение. Скорость роста остатка на счете операции увеличивается.

Важно отметить, что полученная оценка максимальной эффективности операции является *маргинальной, верхней оптимистичной.* Действительно, добавление в неполную модель каких-то уточняющих модель ограничений множество допустимых состояний расширить не может. Значит, никакое улучшение модели не приводит к увеличению оценки эффективности.

Из рис. 2—3 видно, что графики как фазовых переменных, так и управлений имеют *нелинейные* участки.

Для определения вида этих нелинейностей используем непрерывную аппроксимации дискретных зависимостей функциями $S(t)$, $F(t)$, $V(t)$, $R(t)$ и $Q(t)$ для значений $t \in [0, T]$.

Пусть конец k-го периода совпадает с моментом $t = k$. Тогда $T = N$ и система разностных уравнений (1) (1°—3°) может быть аппроксимирована системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{F} = R\,, \\ \dot{V} = Q\,, \\ \dot{S} = \rho F - \rho_0 V - R + Q \end{cases} \tag{3}$$

при условиях:

$$F(0) = V(0) = S(0) = 0\,; \qquad F(T) = V(T) = 0\,;$$

$$F(t) \geq 0\,, \quad V(t) \geq 0\,, \quad S(t) \geq 0,$$

$$\underline{R} \leq R(t) \leq \overline{R}\,, \qquad \underline{Q} \leq Q(t) \leq \overline{Q} \qquad \forall t \in [0, T]\,.$$

Целевой функционал будет иметь вид: $S(T) \longrightarrow \max\,.$

Рассмотрим первую группу периодов. Здесь мы имеем

$$S(t) = 0\,; \quad R(t) = \overline{R} \quad \Longrightarrow \quad F(t) = \overline{R}t\ .$$

Поэтому система (3) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \dot{V} = Q\,, \\ \\ 0 = \rho\overline{R}\,t - \rho_0 V - \overline{R} + Q\,, \end{cases}$$

что приводит к *задаче Коши* для $V(t)$:

$$\dot{V} = \rho_0 V - \rho\overline{R}\,t + \overline{R}, \qquad \mathrm{V(0)=0},$$

Ее решением является функция

$$V(t) = \alpha\exp(\rho_0 t) + \beta t + \gamma\,,$$

где α, β и γ суть некоторые однозначно определяемые константы.

Рассмотрим теперь вторую группу периодов. Предположим, что первая группа завершилась в момент времени t_1. Пусть $V(t_1) = V_1$ и $F(t_1) = F_1$. Тогда для второй группы имеем

$$S(t) = 0\,; \;\; Q(t) = \underline{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = V_1 + \underline{Q}(t - t_1)\,.$$

Откуда

$$\begin{cases} \dot{F} = R\,, \\ \\ 0 = \rho F - \rho_0 \Big(V_1 + \underline{Q}(t - t_1) \Big) - R + \underline{Q}\,. \end{cases}$$

И мы получаем задачу Коши для $F(t)$:

$$\dot{F} = \rho F - \rho_0 \Big(V_1 + \underline{Q}(t - t_1) \Big) + \underline{Q}\,, \qquad F(t_1) = F_1.$$

Ее решением будут

$$F(t) = \kappa \, \exp(\rho\, t) + \lambda\, t + \mu \qquad \text{и} \qquad R(t) = \kappa\, \rho \, \exp(\rho\, t) + \lambda\,,$$

где κ, λ и μ суть однозначно определяемые константы.

Наконец, рассмотрим третью[1] группу периодов. Пусть вторая группа завершается в момент времени t_2 со значениями $V(t_2) = V_2$ и $F(t_2) = F_2$. Для третьей группы имеем

$$Q(t) = \underline{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad V(t) = V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\,,$$

$$R(t) = \underline{R} \qquad \Longrightarrow \qquad F(t) = F_2 + \underline{R}(t - t_2)\,.$$

Тогда система (3) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{F} = \underline{R}\,, \\ \\ \dot{V} = \underline{Q}\,, \\ \\ \dot{S} = \rho\Big(F_2 + \underline{R}(t - t_2)\Big) - \rho_0\Big(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\Big) - \underline{R} + \underline{Q}\,. \end{cases}$$

Окончательно мы получаем задачу Коши

$$\dot{S} = \rho\Big(F_2 + \underline{R}(t - t_2)\Big) - \rho_0\Big(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\Big) - \underline{R} + \underline{Q}\,, \qquad S(t_2) = 0\,.$$

Ее решением является функция

$$F(t) = \sigma t^2 + \theta t + \nu,$$

где σ, θ и ν суть однозначно определяемые константы.

Здесь нетрудно заметить, например, что

$$\sigma = \frac{\rho\underline{R} - \rho_0\underline{Q}}{2} \le 0\,.$$

[1] Исследование четвертой группы полностью аналогично исследованию третьей.

Метод параметрической линеаризации. Решение задачи верхнего уровня

Рассмотрим теперь случай, когда доходность ценных бумаг и стоимость кредита не являются постоянными, а определяются формулами:

$$\rho(k) = \begin{cases} A\,, & k < K\,, \\ B\,, & K \le k \le K + \Delta\,, \\ A\,, & k > K + \Delta \end{cases}$$

и (4)

$$\rho_0(k) = \begin{cases} A_0\,, & k < K_0\,, \\ B_0\,, & K_0 \le k \le K_0 + \Delta_0\,, \\ A_0\,, & k > K_0 + \Delta_0\,, \end{cases}$$

то есть функции $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ являются кусочно-постоянными при постоянных A, B, A_0, B_0, Δ и Δ_0.

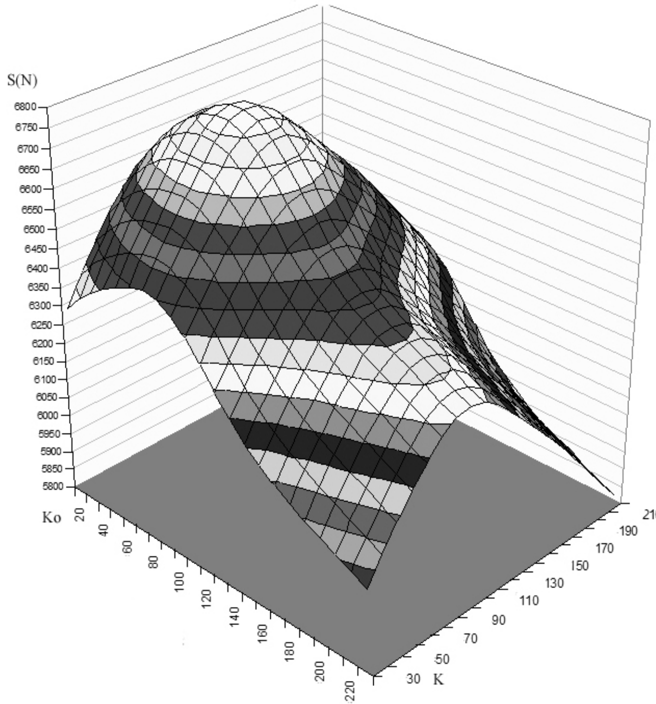

Рис. 4. 3D-представление решения задачи (4)

Решаемая задача заключается в анализе (при помощи сформулированной выше модели) зависимости $S_{K,K_0}(N)$. То есть в поиске маргинальной оценки величины остатка средств на счете операции при ее завершении от моментов скачков доходности и стоимости кредита на рынке ценных бумаг.

Таким образом, задача верхнего уровня является нелинейной и сводится к построению описания зависимости $S(N)$ от K и K_0. А поскольку ее размерность невелика, то для решения возможно использование перебора по сетке значений аргументов с постоянным шагом.

При решении были использованы следующие значения параметров:

$$A = 0.008,\ B = 0.01,\ A_0 = 0.004,\ B_0 = 0.006.$$

При этом выбирались значения $N = 300$, $\Delta = \Delta_0 = 50$ с параметрами двумерной сетки $30 \le K \le 220$, $20 \le K_0 \le 230$, причем величина шага по сетке равнялась 10.

Графическое представление зависимости $S_{K,K_0}(N)$ показано на рис. 4.

Из качественного анализа полученных результатов следует, что в случае нестабильности рынка ценных бумаг, проявляющейся в скачке дохода, существует реакция рынка кредитных линий, заключающаяся в скачке стоимости кредита, при которой достигается максимальная эффективность операции.