

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ЭКСТРЕМУМ

В начале рассмотрим случай поиска локального минимума функции *двух* переменных, поскольку уже для $n = 2$ все существенные отличия от одномерной задачи можно легко продемонстрировать.

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x, y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in \Omega$ локальный минимум. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ *строгий*

локальный минимум, если существует U_ε° - проколота окрестность, такая, что для *любой* точки $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_\varepsilon^\circ$ выполнено неравенство

$$f(x, y) > f(x^*, y^*). \quad (1)$$

Понятно, что проверить выполнение условия определения 1 для всех точек окрестности U_ε° невозможно. Поэтому необходимо получить условия существования экстремума, проверка которых практически реализуема.

В некоторых случаях, удастся преобразовать запись функции $f(x, y)$ к виду, в котором выполнение неравенства (1) очевидно или легко проверяется. Например, функцию $f(x, y) = x^4 - x^2 y + y^2$ можно записать так:

$$f(x, y) = x^4 - x^2 y + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x^2 - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Откуда следует, что точка $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ есть точка локального минимума. Впрочем, подобная ситуация есть исключение, а не правило.

Более удобным способом использования определения 1 является оценка знака разности $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ для точек окрестности U_ε° при помощи *формулы Тейлора*.

Формулу Тейлора для функции $f(x, y)$ в точке $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, как известно, можно записать в виде

$$f(x, y) = f(x^*, y^*) + df + \frac{1}{2}d^2 f + o(\rho^2), \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx = x - x^*$ и $dy = y - y^*$, а дифференциалы df и $d^2 f$ соответственно равны

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

В двух последних формулах частные производные вычислены в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$.

Из (2) получаем, что

$$f(x, y) - f(x^*, y^*) = df + \frac{1}{2} d^2 f + o(\rho^2), \quad (3)$$

Здесь отметим, что, согласно теореме Тейлора (об остаточном члене в форме Пеано) первое слагаемое в правой части (3) в силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(x, y)$, имеет порядок малости $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Второе слагаемое в правой части - порядок малости $\rho^2 = dx^2 + dy^2$.

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ знак приращения $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ определяется знаком величины $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, который может быть *любым* в силу линейной зависимости df от dx и dy .

Иначе говоря, если $\text{grad } f(x, y) \neq 0$ и для некоторого вектора $\left\| \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix} \right\|$ мы имеем $f(x, y) - f(x^*, y^*) > 0$, то для вектора $(-\left\| \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix} \right\|)$ мы обязательно будем иметь, что $f(x, y) - f(x^*, y^*) < 0$, так как производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ от значений dx и dy не зависят. Значит, у непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в точках, где $\text{grad } f(x, y) \neq 0$, экстремума (т.е. минимума или максимума) быть не может. Заметим, что точки, в которых $\text{grad } f(x, y) = 0$, принято называть *стационарными точками* для функции $f(x, y)$.

В итоге мы приходим к следующему *необходимому* условию существования экстремума:

Если непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$, то $\text{grad } f(x^*, y^*) = 0$.

Это необходимое условие не является достаточным. Пример: $f(x, y) = xy$. Здесь в начале координат градиент есть нулевой вектор, а экстремума нет.

Пусть теперь мы рассматриваем только точки, в которых $\text{grad } f(x, y) = 0$. В этом случае знак разности $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ будет совпадать со знаком второго слагаемого в правой части (3), т.е.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \quad (4)$$

В формуле (4) значения производных вычислены в фиксированной точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ и не зависят от значений dx и dy . Для простоты записей будем обозначать эти значения так:

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Напомним, что матрица $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ называется *матрицей Гессе*.

Тогда можно утверждать, что знак разности $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ совпадает со знаком квадратичной формы

$$A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2. \quad (5)$$

Если эта квадратичная форма *положительно определенная*, то в точке $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix}$ функция $f(x, y)$ будет иметь *строгий локальный минимум*, а, если эта форма *отрицательно определена*, то - *строгий локальный максимум*. Наконец, если форма не имеет знаковой определенности (как строгой, так и нестрогой), то экстремума гарантировано нет. Оставшиеся возможные случаи будут требовать дополнительного исследования.

Итак, мы пришли к достаточным условиям вида:

Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в стационарной точке квадратичная форма (5) положительно определена, то $f(x, y)$ имеет в этой точке строгий локальный минимум.

Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в стационарной точке квадратичная форма (5) отрицательно определена, то $f(x, y)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум.

Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в стационарной точке квадратичная форма (5) не имеет знаковой определенности, то $f(x, y)$ не имеет в этой точке строгого локального экстремума.

Заметим, что, например, *первое достаточное условие не является необходимым*. Контр-пример: $f(x, y) = x^4 + y^4$. Здесь в начале координат есть строгий минимум, а строгой положительности нет.

Напомним теперь, доказываемые в курсе линейной алгебры, методы исследования квадратичной формы (5) на наличие или отсутствия знаковой неопределенности.

- 1) *Метод Лагранжа*. Он сводится к построению диагонального (или канонического) базиса методом выделения полных квадратов, т.е. базиса, в котором коэффициент B у квадратичной формы (5) равен нулю.
- 2) *Критерий Сильвестра*. Этот критерий утверждает, что для положительной определенности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A > 0$ и $\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$.

Для отрицательной определенности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A < 0$ и $\det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$.

- 3) *Диагонализация матрицы квадратичной формы в евклидовом пространстве.* Этот метод основан на теореме о том, что в базисе из собственных векторов самосопряженного преобразования, имеющего в ОНБ матрицу вида $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, матрица такого преобразования диагональная, причем на ее главной диагонали стоят собственные значения этого преобразования.

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: 1) Найдем вначале для бесконечно дифференцируемой функции $f(x, y)$ все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\text{grad } f(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

2) Проверим теперь выполнение *достаточных* условий в стационарных

точках. Строим матрицу Гессе $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$.

В первой стационарной точке матрица Гессе будет $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$. Для нее выполняется критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы (5). Значит в точке $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ у функции строгий локальный минимум.

Во второй стационарной точке матрица Гессе равна $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$. Для нее не выполняется достаточное условие знаковой определенности квадратичной формы (5). В точке $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ у экстремума нет, поскольку в малой окрестности начала координат $f(x, y) = -3dxdy + dx^3 + dy^3$ и при $dx = dy$ имеем $\Delta f = -3dx^2 + 2dx^3 < 0$, а при $dx = -dy$ имеем $\Delta f = 3dx^2 - 2dx^3 > 0$.

Пример 2. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y$.

Решение: 1) Для бесконечно дифференцируемой функции $f(x, y)$ найдем все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\text{grad } f(x, y) = o \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 12 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Откуда получаем четыре точки, подозрительные на экстремальность

$$\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right\|.$$

2) Проверим выполнение *достаточных* условий в стационарных точках.

$$\text{Матрица Гессе имеет вид} \quad \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{array} \right\|.$$

Эта матрица симметрическая и в ОНБ может рассматриваться как матрица самосопряженного преобразования. Которая, в свою очередь, в ОНБ из собственных векторов имеет диагональный вид. Причем на главной диагонали стоят собственные значения.

Результаты применения метода приведем в следующей таблице

Стац. точка	Матрица Гессе	Знаковая определенность	Характ. уравн. и собств. значения	Экстремум?
$\left\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{array} \right\ $	Положительная	$(12 - \lambda)^2 - 36 = 0$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 18$	Строгий минимум
$\left\ \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{array} \right\ $	Отрицательная	$(-12 - \lambda)^2 - 36 = 0$ $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -18$	Строгий максимум
$\left\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{array} \right\ $	Нет	$(6 - \lambda)^2 - 144 = 0$ $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 18$	Нет
$\left\ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right\ $	$\left\ \begin{array}{cc} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{array} \right\ $	Нет	$(-6 - \lambda)^2 - 144 = 0$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -18$	Нет

Пример 3. В E^2 исследовать на экстремум $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума $\text{grad } f(x, y) = o$ или

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^3 + 4y^3 = 0 \Rightarrow y = -x.$$

Откуда, подставив в первое уравнение системы, получим $4x^3 - 8x = 0$.

Значит, стационарных точек три: $\left\| \begin{array}{c} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$.

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе следующего вида $\begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$. В первых двух стационарных точках справедливо равенство $x^2 = y^2 = 2$ и потому в этих точках матрица Гесса $\begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}$. Следовательно, в первых двух точках мы имеем строгие локальные минимумы.

В третьей стационарной точке - в начале координат - матрица Гессе равна $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$ и квадратичная форма (5) является отрицательно полуопределенной. Значит, ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

Воспользуемся тем, что изменение значения исследуемой функции в начале координат определяется следующей формулой:

$$\Delta f(x, y) = dx^4 + dy^4 - 2(dx - dy)^2.$$

В этом случае, выходя из начала координат по направлению $dx = dy$, мы получим, что $\Delta f(x, y) > 0$, а выходя по направлению $dx = -dy$, будем иметь $\Delta f(x, y) = 2dx^4 - 8dx^2 < 0$ при достаточно малых $|dx|$. Это означает, что начало координат не является экстремальной точкой для исследуемой функции.

Пример 4. В E^2 исследовать на экстремум $f(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума $\text{grad } f(x, y) = 0$ или
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y + 4 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 1 = 0.$$

Множество стационарных точек неограниченно и есть прямая в E^2 .

2) Проверяем достаточные условия. Имеем матрицу Гессе, одинаковую для всех стационарных точек $\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$. Значит, в каждой стационарной точке квадратичная форма (5) является положительно полуопределенной и ни одно из трех достаточных условий *не применимо*.

В этой ситуации можно воспользоваться тем, что исследуемая функция может быть записана так:

$$f(x, y) = (2x - y)^2 + 2(2x - y) + 1 = (2x - y + 1)^2.$$

Откуда следует, что каждая точка прямой $2x - y + 1 = 0$ является точкой минимума функции $f(x, y)$, но нестрогого, поскольку в любой ее окрестности имеются другие точки с тем же значением $f(x, y)$.

Пример 5. В E^2 исследовать на экстремум $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение: 1) Необходимое условие экстремума утверждает, что либо $\text{grad } f(x, y) = 0$, либо он не существует.

Нетрудно видеть, что в любой точке, кроме начала координат, вектор

$$\text{grad } f(x, y) \text{ имеет вид } \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\|. \quad (6)$$

Среди таких точек стационарных нет, поскольку длина вектора градиента для них равна единице.

Остается рассмотреть точку начало координат. в ней вектор градиента не существует, поскольку не существуют пределы, являющиеся частными производными по x и y . Действительно, из курса математического анализа известно, что пределы вида

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(0 + dx, 0) - f(0, 0)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{dx^2}}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{-|dx|}{dx}$$

и

$$\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + dy) - f(0, 0)}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{dy^2}}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{-|dy|}{dy}$$

не существуют. Заметим, что использование формул (6) для обоснования недифференцируемости исследуемой функции в начале координат, является неверным.

Поскольку применение критериев экстремума с данной задаче невозможно, воспользуемся непосредственно определением. Имеем следующую оценку знака изменения значения исследуемой функции при произвольном отклонении аргументов от начала координат:

$$f(0 + dx, 0 + dy) - f(0, 0) = 1 - \sqrt{dx^2 + dy^2} - 1 = -\sqrt{dx^2 + dy^2} < 0 \quad \forall dx, dy,$$

из которой следует, что начало координат является точкой строго максимума.

Пример 6. В E^2 исследовать на экстремум функцию $u(x, y)$, заданную неявно условием $F(x, y, u) = 1 - x^2 - y^2 - u^2 = 0$. (7)

Решение: 1) Найдем производные функции $u(x, y)$, заданной неявно:

$$\text{имеем } u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}, \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u}, \text{ где}$$

$$F'_x = -2x, \quad F'_y = -2y, \quad F'_u = -2u.$$

Тогда, в силу необходимых условий экстремальности

из
$$\begin{cases} u'_x = -\frac{x}{u} = 0 \\ u'_y = -\frac{y}{u} = 0 \end{cases}$$
 следует, что точка $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ подозрительная на экстремум.

2) Для применения достаточных условий найдем матрицу Гессе в подозрительной точке, получим

$$\begin{vmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u} + x \frac{u'_x}{u^2} & x \frac{u'_y}{u^2} \\ y \frac{u'_x}{u^2} & -\frac{1}{u} + y \frac{u'_y}{u^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

С другой стороны из (7) имеем, что в точке $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ переменная $u = \pm 1$, то есть уравнение (7) в окрестности этой точки задает две различные функции.

Используя достаточные условия экстремума, из (8) получаем, что у одной из этих функций с $u = -1$ имеем минимум, а при $u = 1$ - максимум.

К данному заключению можно было также придти, заметив, что в окрестности точки $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ из уравнения (7) следует, что либо $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, либо $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Пример 7. Пусть непрерывная функция $F(x)$ имеет в точке x^* локальный экстремум. Верно ли утверждение: в этом случае найдется такая окрестность точки x^* , для которой $F(x)$ монотонна как в правой, так и в левой полукрестности этой точки? Ответ обосновать.

Решение: Нет, неверно. Пример: непрерывная функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^2 \left(2 + \cos \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x^* = 0$ минимум, но не является монотонной в любой полукрестности этой точки.