# ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Термин *'задача оптимального управления'* используется для обозначения специального класса задач поиска условного экстремума, возникающих при исследовании объектов или процессов, обладающих следующими свойствами:

- периодичностью (т.е. повторяемостью описания модели) или во времени, или в пространстве;
- возможностью разбиения набора количественных показателей, описывающих каждый период, на два подмножества:
  - показателей состояния (или фазовых переменных);
  - показателей управляющих воздействий (или управлений).

  причем состояние объекта или процесса для некоторого периода *зависит* от состояний для других периодов, в то время как управление для каждого из периодов осуществляется *независимо*.

В тех случаях, когда под периодом понимается некоторый момент (или промежуток) *времени*, задачи данного класса часто называют '*динамическими*'.

Наконец, в зависимости от того является ли множество периодов счетным или нет, используется, уточняющее класс задачи, определение − '*дискретная*' или '*непрерывная*' задача.

**Дискретные динамические задачи**

Рассмотрим $N$-периодическую модель, описываемую для каждого из периодов $k = [1, N]$ совокупностью $x(k)$ – $n$-компонентных *векторов состояния* и $u(k)$ – $r$-компонентных *векторов управления*, удовлетворяющих как системе связей вида

$$x_i(k+1) = f_{ik}(\, x(k), u(k)\,)\,;\; i = [1, n],\, k = [1, N-1], \tag{5.1.1.1}$$

так и набору смешанных ограничений

$$g_{jk}(x(k), u(k)) \ge 0\,;\; j = [1, m]\,; k = [1, N]\,. \tag{5.1.1.2}$$

Для этой модели возможна постановка задачи *оптимального управления*, заключающейся в определении натурального $N^*$, а также $x^*(k) \in E^n$ и $u^*(k) \in E^r$ ($\forall k = [1, N]$), доставляющих экстремум функционалу

$$\Phi(x(1), \dots, x(N), u(1), \dots, u(N-1), N) \tag{5.1.1.3}$$

где функции

$$\Phi(\, x(1), \dots, x(N),\, u(1), \dots, u(N),\, N\,)\,,$$
$$f_{ik}(x(k), u(k)) \quad \text{и} \quad g_{jk}(x(k), u(k))$$

непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Формально задача (5.1.1.1)-( 5.1.1.3) является задачей *математического программирования*, методы решения которой существенно зависят от вида функций входящих в ее условие.

Например, мы можем рассмотреть специальный подкласс задач этого вида, называемых задачами *быстродействия* для *линейных* дискретных систем и имеющих следующую формулировку:

*найти минимальное число периодов* – натуральное $N$, а также *множества векторов состояний и управлений* ( т.е. $x(k) \in E^n$ и $u(k) \in E^r$, $k = [1, N]$ ), которые удовлетворяют как системе динамических связей

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + c(k), \\ &\forall k = [1, N-1] \end{aligned} \qquad (5.1.1.4)$$

так и системе смешанных ограничений

$$\begin{aligned} &D_j(k)x(k) + E_j(k)u(k) + g_j(k) \geq 0, \\ &\forall k = [1, N], \ \forall j = [1, m] \end{aligned} \qquad (5.1.1.5)$$

Для решения задачи (5.1.1.4)-(5.1.1.5) может быть использован метод перебора, следующего вида.

Если оказывается, что для некоторого $N$ система (5.1.1.4)-(5.1.1.5) совместна, то значение этого пробного числа периодов уменьшается. Если же для данного $N$ устанавливается факт несовместности системы (5.1.1.4)-(5.1.1.5), то значение $N$ увеличивается и анализ совместности повторяется для нового значения $N$.

Процесс заканчивается, когда фиксируются два последовательных натуральных числа $N^* - 1$ и $N^*$, таких, что система (5.1.1.4)-(5.1.1.5) несовместна для $N^* - 1$ и совместна для $N^*$. То есть искомое минимальное $N^*$ найдено.

**Непрерывные динамические задачи**

Рассмотрим динамический (то есть, способный меняться непрерывно с течением времени) объект, *состояние* которого в некоторый фиксированный момент времени $t \in [t_0, T]$ полностью и однозначно описывается упорядоченным набором чисел

$$\{ x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \} \equiv x(t), \tag{5.1.2.0}$$

который можно считать элементом $n$-мерного евклидова пространства $E^n$.

Допустим также, что данный объект является *управляемым*, то есть для каждого момента времени $t \in [t_0, T]$ существует упорядоченный набор чисел

$$\{ u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t) \} \equiv u(t) \in E^r ,$$

определяющих характер изменения состояния этого объекта.

Будем предполагать, что процесс изменения состояния рассматриваемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{5.1.2.1}$$

причем функции $x(t)$ и $u(t)$ должны в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ удовлетворять системе ограничений

$$g_s(x, u) \geq 0, \quad s = [1, m]. \tag{5.1.2.2}$$

Отметим, что как и дискретном случае:

- компоненты вектор-функции $x(t)$ принято называть *фазовыми переменными* или просто – *фазами*, а пространство $E^n$ – *фазовым пространством*;
- компоненты $u(t)$ в этом случае называются *управляющими параметрами* или – *управлениями*, а пространство $E^r$ – *пространством управлений*.

Различие между фазами и управлениями состоит в том, что только производные фаз (по времени) являются левыми частями уравнений (5.1.2.1).

Если фазы $x$ и управления $u$ удовлетворяют ограничениям (5.1.2.2), то их называют *допустимыми*.

Заметим также, что условия (5.1.2.2) могут реализовывать связь между $x$ и $u$. Например, наличие в системе условий (5.1.2.2) уравнений вида $u = b(x)$ позволяет выбирать управления в зависимости от состояния управляемого объекта. Такого рода ограничения в теории оптимального управления принято называть *обратными связями*.

Для модели (5.1.2.1)-( 5.1.2.2) представляется естественной постановка следующей задачи *оптимального управления*:

найти вектор-функции $x^*(t) \in E^n$ и $u^*(t) \in E^r$,

удовлетворяющие условиям (5.4.1)-(5.4.2) и

доставляющие экстремум функционалу $\Phi(x,u,T)$. (5.1.2.3)

Приведем пример такой задачи.

Пусть материальная точка массы $m$ может перемещаться вдоль оси $Ox$ под действием трех сил:

- ограниченной по модулю силы тяги $u$,
- диссипативной силы трения $\mu v$, пропорциональной скорости движения $v$,
- и упругой потенциальной силы $\kappa x$.

Тогда согласно второму закону Ньютона движение точки будет определяться уравнением

$$m w = -\mu v - \kappa x + u \ ,$$

где $w$ – ускорение точки.

Введем фазовые переменные

$x_1 = x$, значение координаты точки на оси $Ox$, и

$x_2 = v = \dot{x}_1$ – скорость движения точки вдоль оси.

Поскольку ускорение точки $w = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$, то для рассматриваемой модели система уравнений (5.1.2.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \ , \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\kappa}{m} x_1 - \dfrac{\mu}{m} x_2 + \dfrac{1}{m} u \ . \end{cases} \qquad (5.1.2.4)$$

при условиях: $-c \le u \le c$, где $c$ – некоторая положительная константа.

Требуется найти вектор-функции $x^*(t)$ и $u^*(t)$ такие, что объект, описываемый условиями (5.1.2.3) переходит из исходного состояния $x(0) = x^0$ в состояние $x_1 = x_2 = 0$ за минимально возможное время $T^*$.

Это означает, что целевой функционал (5.1.2.3) в данном случае имеет вид: $\Phi(x,u,T) = T \to \min$. Задачи оптимального управления с подобным целевым функционалом (как и в дискретном случае) принято называть задачами *быстродействия*.

Рассмотрим теперь схему решения задачи (5.1.2.1)-(5.1.2.2)-(5.1.2.3), основанную на идее *дискретизации времени* в линейных непрерывных задачах оптимального управления.

Пусть задача (5.1.2.1)-(5.1.2.2)-(5.1.2.3) формулируется, например, так

$$\text{максимизировать по } \{x(t),u(t)\} \quad \int_0^T \left[(c(t),x(t)) + (f(t),u(t))\right]dt,$$

$$\text{при условиях:} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ D(t)x &+ E(t)u \geq o, \quad \forall t \in [0,T], \end{aligned} \tag{5.1.2.5}$$

где зависящие от времени матрицы $A(t), B(t), C(t), D(t)$ и вектор-функции $x(t), u(t), c(t), f(t)$ имеют соответствующие друг другу размеры.

Дискретизацию по времени выполним очевидным способом

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad x^k = x\big(k\,\Delta t\big), \quad u^k = u\big(k\,\Delta t\big), \quad k = 0,1,2,\dots,N,$$

где $N$ − полное число периодов. В выражениях для производных значения дифференциалов заменяются на *приращения* соответствующих переменных.

Тогда задача (5.1.2.4) принимает вид

$$\begin{array}{lll} \text{максимизировать по } \{x^k, u^k\} & \sum\limits_{k=0}^{N}(\,(c^k, x^k) + (f^k, u^k)\,), & \\ \text{при условиях} \quad x^{k+1} - x^k & = A^k x^k \Delta t + B^k u^k \Delta t, & \quad (5.1.2.6) \\ & D^k x^k + E^k u^k \ge o, \quad \forall k \in [0, N-1]. & \end{array}$$

Полученная задача (5.1.2.6) является обычной задачей линейного программирования, хотя и достатчно высокой размерности.

Проиллюстрируем использование метода дискретизации времени в непрерывной задаче с динамическими связями (5.1.2.5) вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - u_1 + 2u_2. \end{cases} \tag{5.1.2.7}$$

Рассмотрим вначале классическую задачу Коши, то есть случай, когда матрица $B(t)$ нулевая, при $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

Здесь и далее были выбраны значения параметров: $T = 7.5$, $\Delta t = 0.01$, $N = 750$.

Общее решение этой однородной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Vmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{Vmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{Vmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{Vmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{Vmatrix},$$

причем заданные начальные значения фазовых переменных достигаются при $C_1 = 3$ и $C_2 = C_3 = -2$. Графики решений задачи Коши приведены на рис. 5.1.2.1.

Использование схемы дискретизации времени для этой задачи дает аналогичные результаты, показанные на рис. 5.1.2.2. Отметим, что в этом случае задача 5.1.2.6. является системой линейных уравнений.

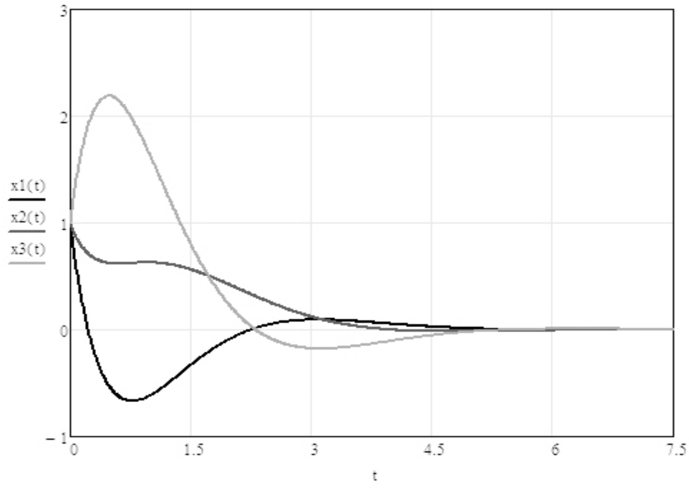


Рисунок 5.1.2.1.

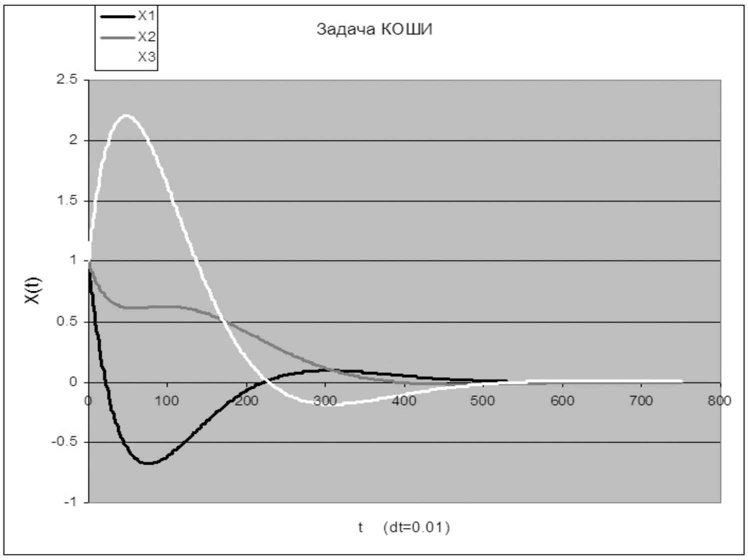


Рисунок 5.1.2.2.

Теперь приведем решения трех вариантов задачи оптимального управления (5.1.2.7) , в которых начальные условия и ограничения на управления одинаковы

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1;$$
$$|u_1(t)| \le 1; \quad |u_2(t)| \le 1, \quad \forall t \in [0,T],$$

но с различными ограничениями на фазовые переменные.

В первом варианте требуется построить оптимальные управления при граничном условии $x_1(T) \to \max$ . Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис.5.1.2.3 и 5.1.2.4.

Для второго варианта граничные условия на фазовые переменные имели вид $x_1(T) = x_2(T) = x_3(T) = 0.2$. Графики соответствующих оптимальных решений показаны на рис.5.1.2.5 и 5.1.2.6.

Третий вариант получается из первого тем, что к краевому ограничению $x_1(T) \to \max$ добавлены условия

$x_1(t) \ge -0.5$, $x_2(t) \ge -0.5$, $x_3(t) \ge -0.5$, $\quad \forall t \in [0,T]$.

Графики оптимальных решений для этого случая показаны на рис.5.1.2.7 и 5.1.2.8.

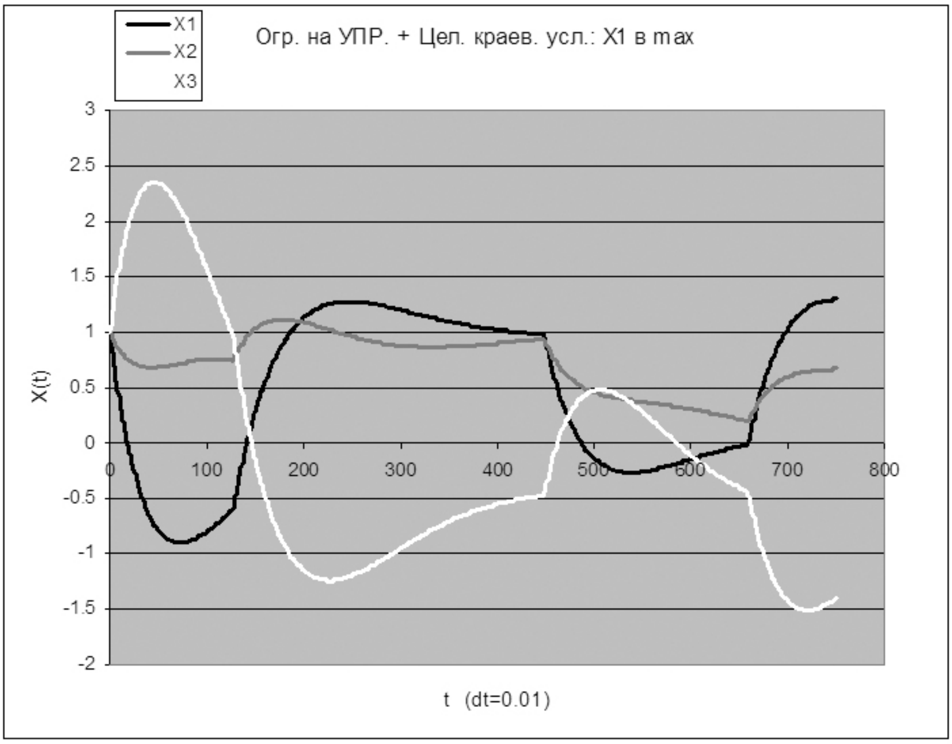


Рисунок 5.1.2.3.

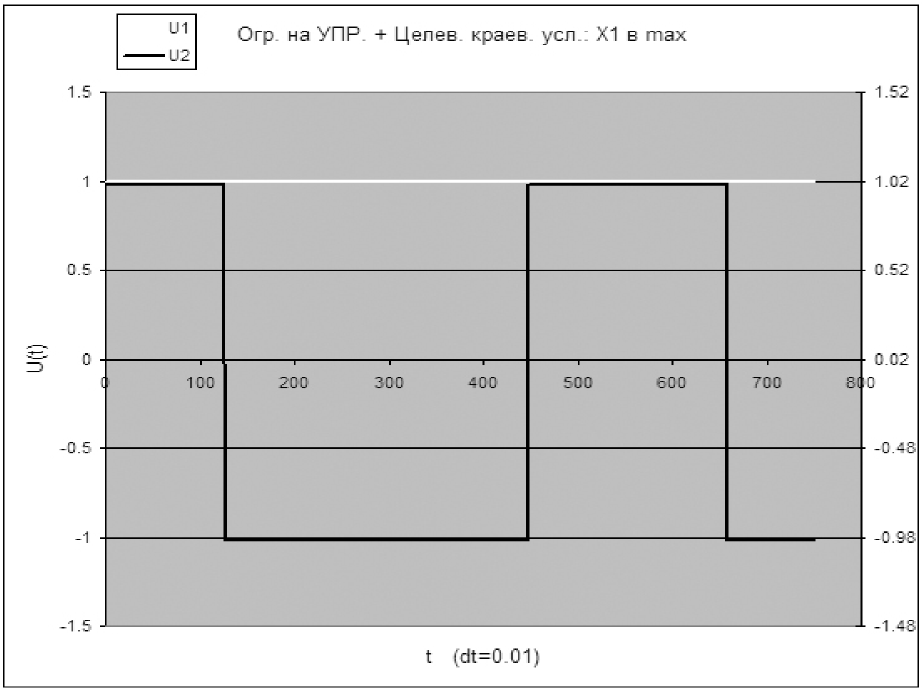


Рисунок 5.1.2.4.

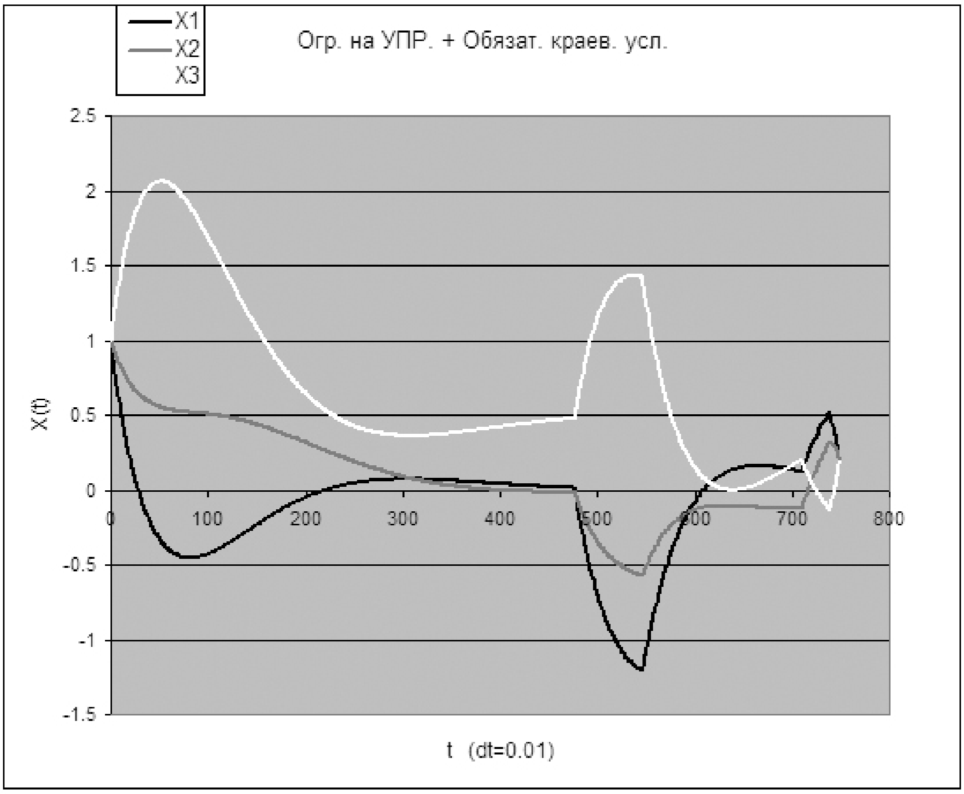


Рисунок 5.1.2.5.

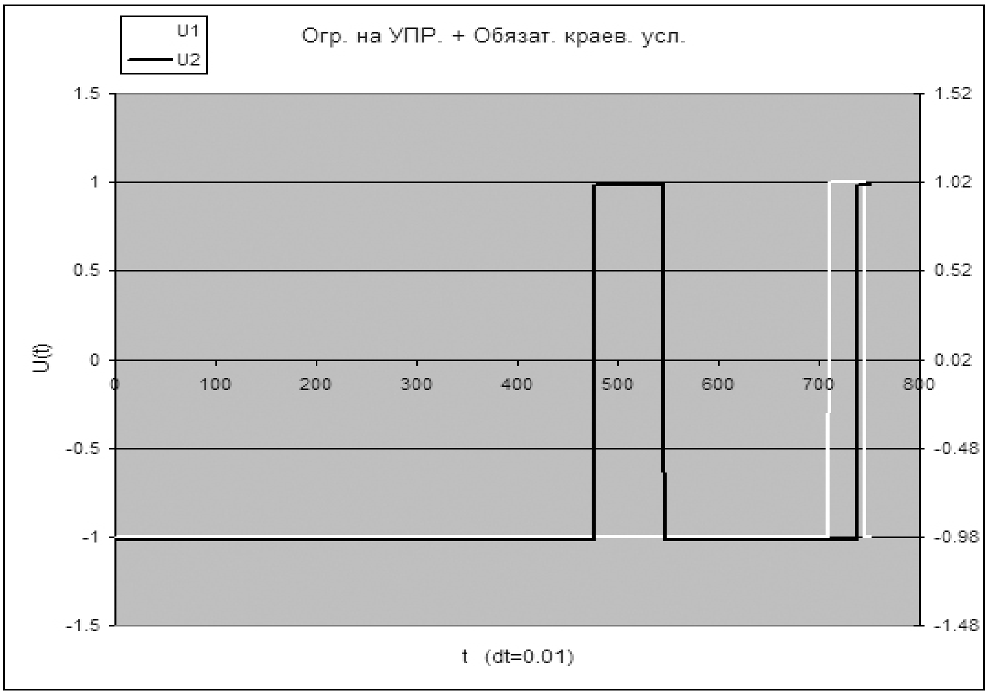


Рисунок 5.1.2.6.

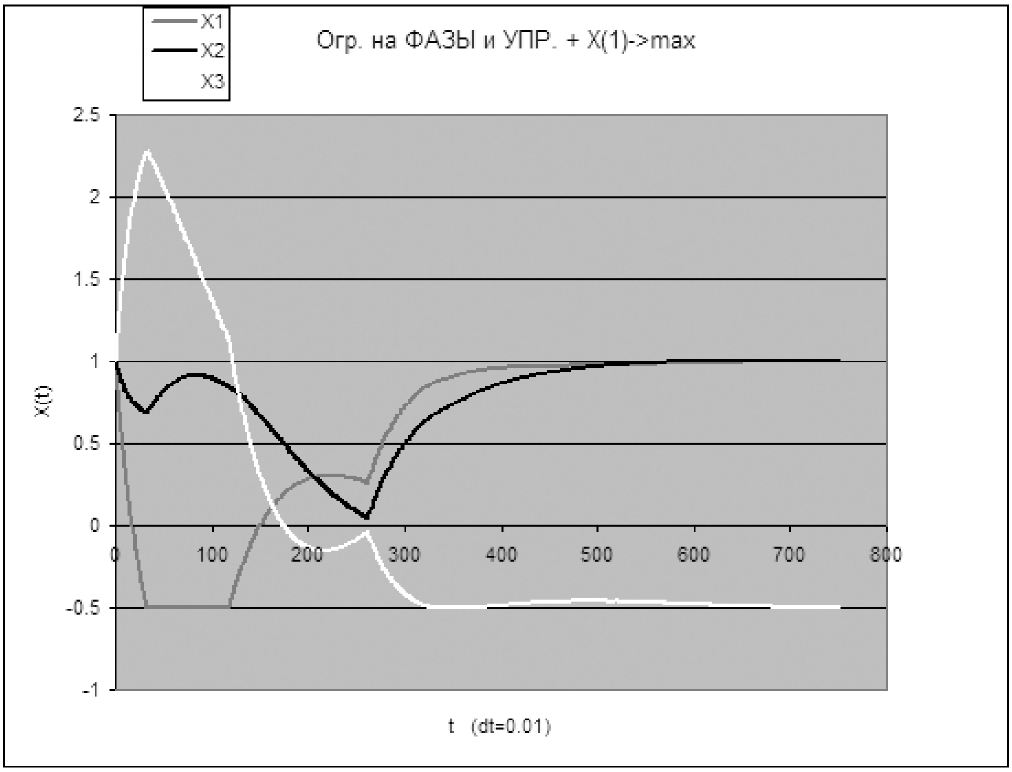


Рисунок 5.1.2.7.

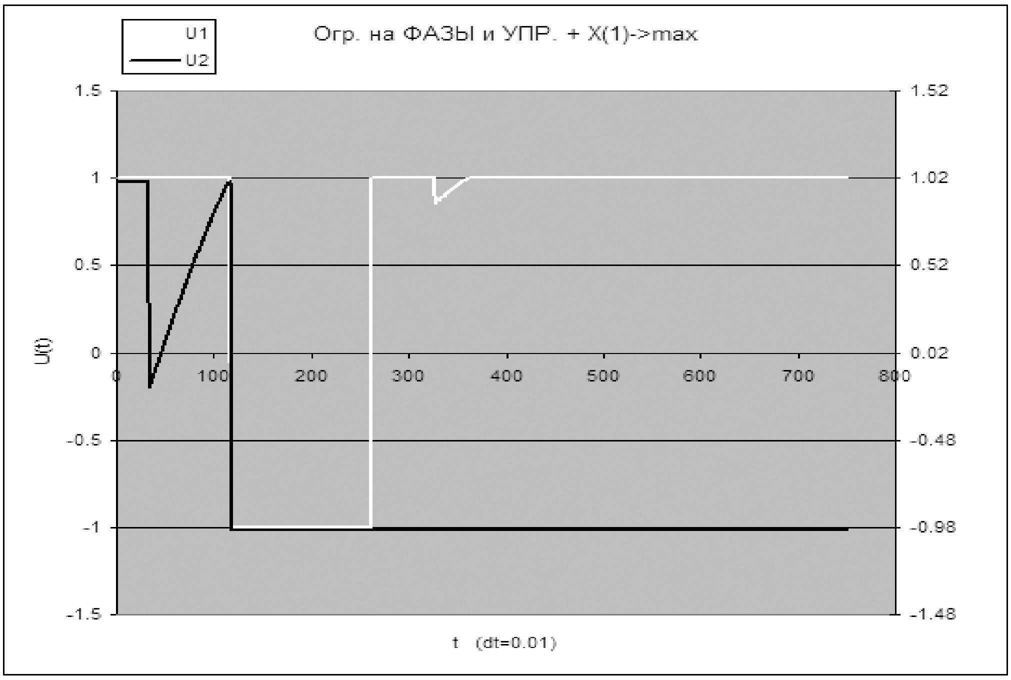


Рисунок 5.1.2.8.

Приведем без доказательства утверждение, что

> *при отсутствии ограничений на фазовые* (*или смешанные*) *переменные, управления находятся на своих граничных значениях, за исключением, быть может, точек «переключения»*.

Этот факт иллюстрируют рис. 5.1.2.4, 5.1.2.6. и 5.1.2.8, на первых двух из которых управляющие переменные имеют свои граничные значения $\forall t \in [0, T]$, в то время как для третьего варианта (с фазовыми ограничениями) имеются интервалы времени, на которых оптимальные управления не находятся на своих границах.