ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРОВ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Умнов Е.А., Умнов А.Е.

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для произвольного натурального n упорядоченный набор состоящий из n^k чисел

$$\left\{ \xi_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \text{ где } i_r = [1, n] \quad \forall r = [1, k], \ \forall k \right\}$$

будем именовать *k-мерной матрицей* или *матрицей размера* n^k (k − любое неотрицательное *целое* число)

Тензором в Λ^n назовем *k*-мерную матрицу, значения элементов которой меняются по *линейным формулам* при переходе от одного базиса к другому. Причем коэффициенты пропорциональности в этих линейных формулах суть *элементы матрицы перехода* (возможно как прямого, так и обратного).

Замечание: здесь под матрицами перехода понимаются как они сами, так и результат их транспонирования − разницы нет, так как элементы в них одни и те же.

Иными словами, тензор есть *многомерная матрица плюс специальное линейное правило* изменения ее компонентов при смене базиса.

На практике оказывается, что тензоры являются удобным инструментом количественного описания различных объектов и явлений (в первую очередь, физических).

Далее будем считать, что исходный базис в Λ^n есть $\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n \}$, а «новый» − $\{ \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \ldots, \vec{g}'_n \}$, при этом матрица прямого перехода (от исходного к «новому») $\| S \| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{Vmatrix}$, а матрица обратного − $\| S \|^{-1} = \| T \| = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{Vmatrix}$.

Условимся также, что все характеристики, относящиеся к «новому» базису будем помечать верхним штрихом.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим трехмерное линейное пространство Λ^3, в котором исходный базис есть $\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \}$, а «новый» − $\{ \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3 \}$, тогда:

1°. Координатное представление *вектора* $\vec{r}$ в Λ^3 $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ есть тензор, поскольку

$$\begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix} = \| S \|^{-1} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix} = \| T \| \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix},$$

что можно записать как $\xi'_s = \sum_{t=1}^{3} \tau_{st} \xi_t \quad \forall s = [1,3].$

Линейность формул преобразования компонент численного описания объекта (в данном случае − вектора) по элементам матрицы обратного перехода очевидна

Тензоры такого вида принято называть *одновалентными контравариантными* (то есть меняющиеся как базисные векторы при *обратном* переходе).

Для справки напомним, что формулы перехода и рассматриваемом случае таковы:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \| S \| \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{Vmatrix} = \| T \| \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{Vmatrix} = \| S \|^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{Vmatrix} = \| T \|^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{Vmatrix}.$$

2°. Координатное представление *линейного функционала* (*линейной функции*) $f(\vec{r})$ в пространстве Λ^3, имеющее вид

$$f(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \xi_j = \| \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \| \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix},$$

есть *тензор с компонентами* $\varphi_j \;\; j = [1,3]$, поскольку (из курса линейной алгебры) известно, что

$$\| \varphi'_1 \quad \varphi'_2 \quad \varphi'_3 \| = \| \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \| \| S \| \qquad \text{или, что то же самое} \qquad \begin{Vmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_1 \\ \varphi'_1 \end{Vmatrix} = \| S \|^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1 \\ \varphi_1 \end{Vmatrix}.$$

В координатах данное соотношение очевидно линейно по компонентам матрицы прямого перехода $\| S \|$ и имеет вид

$$\varphi'_s = \sum_{t=1}^{3} \sigma_{ts} \varphi_t \quad \forall s = [1,3] \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi'_1 = \sigma_{11}\varphi_1 + \sigma_{21}\varphi_2 + \sigma_{31}\varphi_3 \,, \\ \varphi'_2 = \sigma_{12}\varphi_1 + \sigma_{22}\varphi_2 + \sigma_{32}\varphi_3 \,, \\ \varphi'_3 = \sigma_{13}\varphi_1 + \sigma_{23}\varphi_2 + \sigma_{33}\varphi_3 \,. \end{cases}$$

Обратите внимание, что индексы в записи правила изменения тензорных компонент линейной формы $f(\vec{r})$ расставлены иначе, чем в примере 1°. Тензоры из примера 2°

принято называть *одновалентными ковариантными* (то есть меняющиеся как базисные векторы при *прямом* переходе).

3°. Координатное представление *линейного преобразования* $\hat{A}$ в Λ^3 (являющееся квадратной матрицей третьего порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$) есть тензор, поскольку из известной формулы $\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|$ следует, что

$$\begin{Vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{Vmatrix} = \| T \| \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \| S \|$$

или

$$\alpha'_{st} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_{sj} \sigma_{it} \alpha_{ji} \quad \forall s = [1,3], \quad \forall t = [1,3]$$

Тензоры такого вида называют *двухвалентными*, *один раз ковариантными и один раз контравариантными*.

4°. Координатное представление *билинейного функционала* (*билинейной формы*) $B(\vec{x}, \vec{y})$ в Λ^3 также будет тензором, поскольку это есть квадратная матрица третьего порядка $\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{Vmatrix}$, для которой при замене базиса справедлива формула $\| B \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| B \|_g \| S \|$. Это равенство можно также записать в виде

$$\begin{Vmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \beta'_{13} \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \beta'_{23} \\ \beta'_{31} & \beta'_{32} & \beta'_{33} \end{Vmatrix} = \| S \|^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{Vmatrix} \| S \|$$

или

$$\beta'_{st} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma^{\mathrm{T}}_{js} \sigma_{it} \beta_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{sj} \sigma_{it} \beta_{ji} \quad \forall s = [1,3], \quad \forall t = [1,3].$$

Заметьте, что для записи последней формулы было использовано очевидное равенство $\sigma^{\mathrm{T}}_{sj} = \sigma_{js}$. Такие тензоры называют *двухвалентными*, *дважды ковариантными*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Из приведенных выше примеров можно заключить, что валентность тензора это размерность его матрицы − k, а p − «число ковариантностей» (q − «число контравариантностей») определяется числом использования матрицы $\| S \|$ (соответственно матрицы $\| T \|$) в формуле пересчета значений компонент тензора при замене базиса.

Иначе говоря,

в примере 1° $1 = k = p + q = 0 + 1$,
в примере 2° $1 = k = p + q = 1 + 0$,
в примере 1° $2 = k = p + q = 1 + 1$,
в примере 1° $2 = k = p + q = 2 + 0$.

Если это так, то можно использовать следующую версию определения тензора.

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве Λ^n определен *тензор типа* (q, p) q *раз контравариантный* и p *раз ковариантный* (*или* $(p+q)$*-валентный*), если в Λ^n он характеризуется упорядоченным набором n^{p+q} чисел $\xi_{j_1 j_2 \ldots j_q i_1 i_2 \ldots i_p}$ (где $j_m = [1, n]$; $m = [1, q]$ – контравариантные индексы и $i_s = [1, n]$; $s = [1, p]$ – ковариантные), преобразующихся при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ по закону

$$\xi'_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q i'_1 i'_2 \ldots i'_p} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\ldots\sum_{j_q=1}^{n}\sigma_{i_1 i'_1}\sigma_{i_2 i'_2}\ldots\sigma_{i_p i'_p}\ \tau_{j'_1 j_1}\tau_{j'_2 j_2}\ldots\tau_{j'_q j_q}\ \xi_{j_1 j_2 \ldots j_q i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где $i'_s = [1, n]$; $s = [1, p]$ и $j'_m = [1, n]$; $m = [1, q]$, а σ_{ij} и τ_{ij} суть соответственно компоненты матрицы перехода $\| S \|$ и ей обратной $\| T \| = \| S \|^{-1}$.

Громоздкость записи и неудобочитаемость тензоров при использовании стандартной схемы обозначений очевидны уже на примере этого определения. Поэтому в тензорном исчислении используется специальная, более компактная форма описания тензорных объектов и операций с ними, основу которой составляют следующие правила.

1°. Если какой либо из индексов принимает все значения от 1 до n, то в записи тензора этот перечень значений не указывается. Например, запись $\alpha_i = \beta_i$ означает, что
$$\alpha_i = \beta_i \quad \forall i = [1, n].$$

2°. *Порядок следования индексов в записи тензоров существен*. Для того чтобы избежать возможной неоднозначности, применяется следующее правило: если необходимо выписать последовательно все компоненты тензора (например, в виде одной строки), то в первую очередь (если возможно!) увеличиваются индексы, расположенные ближе к правому концу индексного списка.

Например, тензор ξ_{ijs} в Λ^2 имеет следующий порядок компонентов:
$$\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{121}, \xi_{122}, \xi_{211}, \xi_{212}, \xi_{221}, \xi_{222}.$$

3°. Ковариантные и контравариантные индексы в общем случае различаются так: ковариантные индексы записываются как *нижние*, а контравариантные − как *верхние* индексы.

В ряде важных частных случаев (к которым относятся вопросы, рассматриваемые нами далее) разница между ковариантными и контравариантными индексами не существенна, либо вовсе отсутствует. В наших формулах мы будем использовать лишь нижние индексы. Соответствующие пояснения будут даны позднее.

4°. Пусть имеется выражение, являющееся произведением сомножителей, имеющих повторяющиеся индексы, причем каждый такой индекс встречается в записи выражения *ровно дважды*. Тогда по определению считается, что это выражение есть *сумма таких произведений, выписанных для всех значений повторяющегося индекса*. Данную сумму принято называть *сверткой тензора по индексу*.

В случае присутствия в выражении нескольких пар совпадающих индексов имеет место многократное суммирование.

Отметим, что использование одного и того же индекса в записи тензора более двух раз запрещено по определению.

Пример: значение квадратичного функционала (квадратичной формы)

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}\,\xi_j\,\xi_i$$

можно записать теперь в виде двойной свертки $\varphi_{ji}\,\xi_j\,\xi_i$.

Примером одновременного использования сформулированных выше правил, служит система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\xi_i = \beta_k \quad \forall k = [1, n],$$

тензорная запись которой имеет вид $\alpha_{ki}\xi_i = \beta_k$.

Теперь, наконец, определение тензора можно дать в следующей формулировке.

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве Λ^n определен *тензор типа* (q, p) q *раз контравариантный* и p *раз ковариантный*, если в Λ^n он характеризуется упорядоченным набором n^{p+q} чисел $\xi_{j_1 j_2 \ldots j_q i_1 i_2 \ldots i_p}$ (где $j_m = [1, n]$; $m = [1, q]$ – контравариантные индексы и $i_s = [1, n]$; $s = [1, p]$ – ковариантные), преобразующихся при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$ по закону

$$\xi'_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q i'_1 i'_2 \ldots i'_p} = \sigma_{i_1 i'_1}\sigma_{i_2 i'_2}\ldots\sigma_{i_p i'_p}\,\tau_{j'_1 j_1}\tau_{j'_2 j_2}\ldots\tau_{j'_q j_q}\,\xi_{j_1 j_2 \ldots j_q i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где σ_{ij} и τ_{ij} суть соответственно компоненты матрицы перехода $\|S\|$ и ей обратной $\|T\| = \|S\|^{-1}$.

СЛУЧАЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Будем рассматривать *n*-мерное евклидово пространство E^n с правыми ортонормированными базисами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$.

Из курса линейной алгебры известно, что ортогональные матрицы (и только они!) служат матрицами перехода от одного ОНБ к другому. При этом для любой ортогональной матрицы $\| S \|$ справедливо равенство $\| S \|^{-1} = \| S \|^{\mathrm{T}}$, поэтому разница между ковариантными и контравариантными случаями в евклидовом пространстве с ОНБ *отсутствует*, то есть все тензорные формулы выглядят одинаково при их записи как через верхние, так и через нижние индексы. И в дальнейших выкладках мы будем пользоваться только нижними индексами.

Чуть отклоняясь от основного направления изложения рассматриваемого вопроса, заметим, что в произвольном базисе евклидова пространства различие в ковариантной и контравариантной формах записи одного и того же тензора имеется, но оно не принципиально. Действительно, наличие операции скалярного произведения и матрицы Грама (являющейся двухвалентным, дважды ковариантным тензором) позволяет однозначно переводить эти записи из одной формы в другую и обратно. Понятно, что в произвольном конечномерном линейном пространстве Λ^n подобные манипуляции невозможны.

Если интересны детали, то можно посмотреть в любом ресурсе по тензорному исчислению тему «Операция подъема и опускания тензорных индексов в евклидовом пространстве».

Теперь приведем некоторые полезные обозначения и соотношения, записанные (по возможности) как в традиционной векторно-координатной форме, так и в тензорном виде.

1°. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в E^3:

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3 \qquad \text{или} \qquad \vec{x} = \xi_i \vec{e}_i$$

2°. *Символ Кронекера* – это двухвалентный тензор $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$ Нетрудно показать, что в любом базисе его компоненты совпадают с элементами единичной матрицы. Кроме того, его свертка $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$.

3°. *Символ Леви-Чевиты* – это трехвалентный тензор

$$\varepsilon_{jik} = \begin{cases} 0, & \textit{если среди } i, j, k \textit{ есть равные}, \\ 1, & \textit{если } \{i, j, k\} - \textit{четная перестановка}, \\ -1, & \textit{если } \{i, j, k\} - \textit{нечетная перестановка}. \end{cases}$$

Его компоненты не меняются при циклической перестановке индексов. Свертки для этого тензора имеют вид:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}, \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

Нетрудно проверить, что значение символа Леви-Чевиты не меняется при циклической перестановке индексов и меняет знак на противоположный при антициклической перестановке.

4°. Пусть в E^3 заданы векторы $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$ и $\vec{c} = \kappa_1 \vec{e}_1 + \kappa_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$ с тензорными представлениями соответственно $\vec{a} = \alpha_i$, $\vec{b} = \beta_i$ и $\vec{c} = \kappa_i$. Тогда в тензорном виде *скалярное произведение* записывается просто как свертка $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_i \beta_i$, а для *векторного произведения* $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ имеем формулу $\kappa_i = \varepsilon_{ijk} \alpha_j \beta_k$.

Заметьте, что соотношения указанные в п. 3° и 4°, нуждаются в обосновании. Выполните это обоснование самостоятельно.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ

Введем в рассмотрение векторно-дифференциальный оператор *набла,* записываемый символически как $\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \vec{e}_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + \vec{e}_3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_3}$ или, в тензорном виде $\vec{\nabla} = \vec{e}_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$, что равносильно $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$. При этом достаточно часто приходится использовать, также и некоторые комбинации этого оператора, определяемые правилами математического анализа и линейной алгебры. Выпишем основные из них.

1°. *Градиент скалярного поля*. Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно дифференцируемая функция $u(\vec{r}) = u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *градиентом* называется вектор grad $u = \vec{e}_1 \dfrac{\partial u}{\partial \xi_1} + \vec{e}_2 \dfrac{\partial u}{\partial \xi_2} + \vec{e}_3 \dfrac{\partial u}{\partial \xi_3}$. В символическом виде это можно записать как действие оператора набла на скалярную функцию grad $u = \vec{\nabla} u$, а в тензорном формате в виде свертки − разложения по базису − как grad $u = \vec{e}_i \dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}$.

2°. *Дивергенция векторного поля.* Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *дивергенцией* называется скалярная функция $\operatorname{div} \vec{A} = \dfrac{\partial A_1}{\partial \xi_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial A_3}{\partial \xi_3}$. В символическом виде, через скалярное произведение, эту функцию можно записать как $\operatorname{div} \vec{A} = (\vec{\nabla}, \vec{A})$, а в тензорном виде определение дивергенции − $\operatorname{div} \vec{A} = \dfrac{\partial A_i}{\partial \xi_i}$.

3°. *Ротор векторного поля.* Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *ротором* называется векторная функция $\operatorname{rot} \vec{A} = \det \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{Vmatrix}$. В символическом виде, через векторное произведение, эту функцию можно записать как $\operatorname{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}]$, а в тензорном виде определение ротора будет $\operatorname{rot} \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial A_j}{\partial \xi_i} \vec{e}_k$.

4°. *Оператор Лапласа* (*лапласиан*). Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq E^3$ задана дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Ее *лапласианом* называется векторная функция $\Delta \vec{A} = \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_1^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_2^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \xi_3^2}$. В символическом виде, через скалярное произведение, эту функцию можно записать как $\Delta = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$, а в тензорное определение лапласиана таково: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi_i \, \partial \xi_i}$.

При вычислении различных комбинаций в символическом виде следует помнить, что оператор набла в этих комбинациях с одной стороны ведет себя как вектор (то есть удовлетворяет известным соотношениям из курса векторной алгебры), а с другой − является оператором дифференцирования, действующего на скалярные или векторные функции, стоящие в записи вправо от него согласно правилам вычисления производных.

Поясним это примерами.

1°. Найти $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$.

Решим задачу вначале *символическим методом*. Имеем по свойствам скалярного, смешанного и векторного произведений векторов

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = (\vec{A}, [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]) = ([\vec{\nabla}, \vec{\nabla}], \vec{A}) = (\vec{o}, \vec{A}) = 0 .$$

Тензорный метод. Символ Леви-Чевиты равен нулю, если хотя бы у одной из пар его индексов значения одинаковы, поэтому в тензорной форме у трехкратной свертки из 27 слагаемых $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \dfrac{\partial}{\partial \xi_k} \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial A_j}{\partial \xi_i} \vec{e}_k$ будут лишь шесть ненулевых.

Со знаком «плюс» для значений индексов $\{i, j, k\}$ − $\{1,2,3\}$, $\{3,1,2\}$ и $\{2,3,1\}$ − это:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi_3 \, \partial \xi_1}, \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_2 \, \partial \xi_3} \text{ и } \frac{\partial^2 A_3}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2},$$

и со знаком «минус» для значений индексов $\{i, j, k\}$ − $\{2,1,3\}$, $\{3,2,1\}$ и $\{1,3,2\}$ − это:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi_3 \, \partial \xi_2}, \frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_3} \text{ и } \frac{\partial^2 A_3}{\partial \xi_2 \, \partial \xi_1},$$

что в итоге дает свертке значение ноль.

2°. Для векторных полей $\vec{A}$ и $\vec{B}$ найти $\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}]$.

Символический метод. По формуле дифференцирования произведения функций, свойствам смешанного произведения и правилу записи действия оператора имеем

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}]=(\vec{\nabla},[\vec{A},\vec{B}])=(\vec{\nabla},[\overset{\downarrow}{\vec{A}},\vec{B}])+(\vec{\nabla},[\vec{A},\overset{\downarrow}{\vec{B}}])=(\vec{B},[\vec{\nabla},\overset{\downarrow}{\vec{A}}])+(\vec{A},[\overset{\downarrow}{\vec{B}},\vec{\nabla}])=$$

$$=(\vec{B},[\vec{\nabla},\vec{A}])-(\vec{A},[\vec{\nabla},\vec{B}])=(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A})-(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}).$$

Верхней вертикальной стрелкой $\downarrow$ мы показали, на какой из сомножителей в векторном произведении полей действует оператор набла.

Тензорный метод. Здесь учтем, что при циклической перестановке индексов символ Леви-Чевиты не изменяет своих значений, а при антициклической (то есть с однократным изменением порядка следования двух соседних индексов) меняет знаки значений на противоположные. Имеем

$$\operatorname{div}[\vec{A},\vec{B}]=\frac{\partial}{\partial\xi_k}[\vec{A},\vec{B}]_k=\frac{\partial}{\partial\xi_k}(\varepsilon_{ijk}A_iB_j)=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_i}{\partial\xi_k}B_j+\varepsilon_{ijk}A_i\frac{\partial B_j}{\partial\xi_k}=$$

$$=B_j\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_i}{\partial\xi_k}-A_i\,\varepsilon_{kji}\frac{\partial B_j}{\partial\xi_k}=(\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A})-(\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}).$$

3°. Показать, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяющие системе уравнений Максвелла для вакуума

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{E}=0;\\[2mm] \operatorname{rot}\vec{B}=\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{B}=0,\end{cases}$$

будут являться решением волновых уравнений вида:

$$\Delta\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\quad\text{и}\quad\Delta\vec{B}=\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}.$$

Символический метод. Возьмем ротор от обеих частей первого из уравнений системы. Для левой части по формуле «*bac-cab*» получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=[\vec{\nabla},[\vec{\nabla},\vec{E}]]=\vec{\nabla}(\vec{\nabla},\vec{E})-\overset{\downarrow}{\vec{E}}(\vec{\nabla},\vec{\nabla})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla},\vec{E})-(\vec{\nabla},\vec{\nabla})\overset{\downarrow}{\vec{E}}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla},\vec{E})-\Delta\vec{E}=$$

$$=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}.$$

Но поскольку в силу второго уравнения Максвелла $\operatorname{div}\vec{E}=0$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=-\Delta\vec{E}$. Для правой части (с учетом третьего уравнения Максвелла) находим, что

$$-\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Итак, $-\Delta\vec{E} = -\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{E} = \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$. Второе волновое уравнение выводится аналогично. Проверьте это самостоятельно.

Тензорный метод. Проверим справедливость формулы $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}$. Имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \operatorname{rot} E_j}{\partial \xi_i}\vec{e_k} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\varepsilon_{stj}\frac{\partial E_t}{\partial \xi_s}\right)\vec{e_k} =$$

выполнив в первом сомножителе циклическую перестановку индексов и использовав формулу для свертки символа Леви-Чевиты по последнему индексу (см. стр. 6), получим

$$= \varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\varepsilon_{stj}\frac{\partial E_t}{\partial \xi_s}\right)\vec{e_k} = \delta_{ks}\delta_{it}\frac{\partial^2 E_t}{\partial \xi_i\,\partial \xi_s}\vec{e_k} - \delta_{kt}\delta_{is}\frac{\partial^2 E_t}{\partial \xi_i\,\partial \xi_s}\vec{e_k} =$$

$$= \frac{\partial^2 E_i}{\partial \xi_i\,\partial \xi_k}\vec{e_k} - \frac{\partial^2 E_k}{\partial\, \xi_i^2}\vec{e_k} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E}\,.$$

Использованная при этом свертка с символом Кронекера выполняется тривиально: например, $\delta_{lj}\Omega_i = \Omega_j$ или $\delta_{lj}\delta_{st}\Omega_{isk} = \Omega_{jtk}$.

Сведение к волновому уравнению в тензорной форме выполните в качестве итогового теста.