Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра высшей математики

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие пособие по предмету
Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Составитель Е.А. Умнов

МОСКВА
МФТИ
21янв2025г

УДК 517.9

Рецензент:

Кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Бурцев*

Параметрические семейства линий второго порядка на плоскости .: учебно-методическое пособие / сост. Е. А. Умнов — М.: МФТИ, 2025. —30 с.

УДК 517.9

Излагаются теоретические основы построения объединений линий второго порядка разных типов в параметрические семейства. Приводятся примеры использования этих семейств для решения практических задач.

Оглавление

Введение

При решении какой-либо математической задачи естественно желание предварительно максимально упростить постановку задачи. Однако в ряде случаев метод решения может состоять в ее обобщении или даже усложнении.

Одним из методов этого класса является *параметризация* условия задачи, то есть изменение ее условия, путем введения в него некотором способом параметров.

Уточним предварительно смысл используемых далее понятий.

В рамках настоящего пособия под *параметром* мы будем понимать математический объект, являющийся в решаемой задаче константой, значение которой есть элемент из некоторого множества.

Приведем очевидный пример. Задача *найти вещественные решения уравнения* $x^2 - 6x - 5 = 0$ параметрически обобщается к виду *найти вещественные решения уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Понятно, что, если нас интересуют корни лишь исходного уравнения, то такое усложнение условия вряд ли целесообразно.

Рассмотрим другой пример. Пусть требуется найти среди чисел $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, $x_3 = 0$ максимальное. Применение полного перебора очевидно дает ее решение $x_{max} = 4$. Однако оно может быть получено (оцените погрешность на калькуляторе, например, при $\tau = 0.1$) по формуле

$$x_{max} = \lim_{\tau \to +0} \tau \ln \left(e^{\frac{x_1}{\tau}} + e^{\frac{x_2}{\tau}} + e^{\frac{x_3}{\tau}} \right) .$$

В этой формуле используется вспомогательный положительный параметр τ, по которому выполняется предельный переход к нулю. Данная формула, конечно, сложнее, чем программа перебора вариантов ответа, но она не требует выполнения логических операций типа «*если..., то..., иначе...*»

Из приведенных примеров можно заключить, что существуют по крайней мере два вида параметров:

— *экзогенные*, описывающие внешнюю «информационную среду» задачи, и

— *инструментальные*, не влияющие на ответ, но необходимые для реализации алгоритма поиска решения.

В приведенных примерах к первому виду можно отнести коэффициенты квадратного уравнения или значения чисел, среди которых ищется максимум. Ко второму виду относится вспомогательный параметр τ.

Рассмотрим еще один пример.

Найти значение интеграла Дирихле

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx,$$

где α — произвольный вещественный *экзогенный* параметр.

Вычислить этот интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница невозможно, поскольку неопределенный интеграл $\int \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ «не берущийся», то есть не представляемый как некоторая суперпозиция элементарных функций.

Однако, по признаку Дирихле этот интеграл сходится, то есть $I(\alpha)$ имеет конечное значение $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Найти это значение можно, построив вспомогательный интеграл

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx,$$

введя вещественный *инструментальный* параметр $\beta \in [0, 1]$.

Этот интеграл сходится для $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле при любом фиксированном $\beta > 0$. При $\alpha = 0$ он тождественно равен нулю.

В этом случае интеграл от *производной подынтегральной функции по* α

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx$$

будет сходиться по признаку Вейерштрасса равномерно на множестве $\beta \in (0, 1]$ и притом (это — теорема!) конкретно к $\Phi'_\alpha(\alpha, \beta)$.

Кроме того, оказывается, что последний интеграл «берется» двукратным интегрированием «по частям» и, согласно формуле Ньютона-Лейбница, равен (проверьте это самостоятельно) $\dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Имеем $\Phi(0, \beta) = 0$. Тогда, интегрируя при постоянном значении β $\Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = \dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ по переменной α , получаем $\Phi(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Наконец, перейдя в последней формуле к пределу $\beta \to +0$ для фиксированного $\alpha > 0$, получим

$$I(\alpha) = \lim_{\beta \to +0} \Phi(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}.$$

А, в силу нечетности синуса, при любом α имеем $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$.

Здесь стоит отметить, что параметр α в данной задаче является экзогенным, а параметр β — инструментальным.

Таким образом, исходя из рассмотренных примеров, можно заключить, что, хотя параметризация и приводит к формальному усложнению задачи, возникающие при этом дополнительные степени свободы можно использовать

— как для анализа свойств решений и поиска решений со специальными свойствами,
— так и для построения альтернативных алгоритмов поиска самих решений.

Далее в настоящем пособии рассматриваются методы решения различных типов задач, основанные на параметризации описания линий второго порядка на плоскости.

Этот метод основывается на том факте, что любая линейная комбинация уравнений линии второго порядка есть уравнение линии порядка не выше, чем 2.

Если искомая линия второго порядка должна удовлетворять определенному набору условий (например, проходить через заданный набор точек), то можно предположить, что параметризация множества таких линий позволит упростить как постановку решаемой задачи, так и метод ее решения. Скажем, при некоторых значениях параметров линейная комбинация может оказываться уравнением первого порядка. Описания реализации этой идеи читатель может найти, например, в [1,2].

В настоящем пособии далее рассматриваются условия применимости данного подхода и приводятся примеры решения конкретных задач.

Параметрические семейства линий второго порядка на плоскости

Каноническая классификация линий 2-го порядка на плоскости

Линии 2-го порядка на плоскости рассматриваются в декартовой системе координат, которую по умолчанию будем считать ортонормированной $\{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ и дадим

Определение 1	Если линия L является алгебраической линией 2-го порядка, то ее уравнение в данной системе координат имеет вид $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,, \qquad (1)$$ где числа A, B, C, D, E и F — любые вещественные, причем $\lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert \neq 0$, а x и y суть координаты радиуса-вектора любой точки, принадлежащей L.

Очевидно, что коэффициенты уравнения (1) для конкретной линии 2-го порядка меняются при переходе от одной ОНСК к другой. Поэтому при исследовании свойств этих линий целесообразно предварительно перейти к системе координат $\left\{ O', \vec{e'}_1, \vec{e'}_2 \right\}$, в которой вид уравнения линии оказывается *наиболее простым.*

В курсе аналитической геометрии доказывается

Теорема 1 **Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии (при $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$) имеет один из следующих девяти (называемых *каноническими*) видов:**

Таблица 1

Тип линии $\rightarrow$ $\downarrow$ **Вид линии**	Эллиптический $\Delta > 0$	Гиперболический $\Delta < 0$	Параболический $\Delta = 0$
Пустые множества	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$
Изолированные точки	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
Совпадающие прямые			$y'^2 = 0 \quad \forall x'$
Несовпадающие прямые		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \quad \forall x'$
Кривые	*Эллипс* $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Парабола* $y'^2 = 2px'$

где

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ B & C \end{array} \right\| = AC - B^2. \tag{2}$$

Мы также потребуем, чтобы для канонического уравнения *эллипса* **выполнялось** $a \geq b$**.**

Для упрощения последующих рассуждений эту классификацию представим в следующем виде:

Таблица 2

Тип линии $\rightarrow$ $\downarrow$ **Случаи**	Эллиптический $\Delta > 0$	Гиперболический $\Delta < 0$	Параболический $\Delta = 0$
Невырожденные	*Эллипс, мнимый эллипс* $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	*Парабола* $y'^2 = 2px'$
Вырожденные *Мнимые прямые*	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		$y'^2 = -a^2 \quad \forall x'$
Совпадающие прямые			$y'^2 = 0 \quad \forall x'$
Несовпадающие прямые		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2 \quad \forall x'$

Заметим также, что *все* вырожденные линии представляют собой пару действительных или мнимых прямых.

Таблицы 1 и 2 позволяют классифицировать линии 2-го порядка по их каноническим уравнениям. Доказательство теоремы 1, а также альтернативную схему параметрической классификации линий 2-го порядка, заданных в *полярной* системе координат, можно найти, например, в [3].

Из таблицы 2 следует, проверяемая непосредственно, Теорема 2 **Для вырожденности линии второго порядка, описанной в определении 1, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\det \left\| \begin{matrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

Теперь рассмотрим несколько примеров построения параметрических семейств линий 2-го порядка.

1) Если в уравнении (1) за параметр взять коэффициент F, то такое параметрическое семейство будет описывать проекции сечений поверхности с уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$ вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + z = 0\,,$$

плоскостями $z = F$ на координатную плоскость Oxy параллельно оси аппликат.

2) Параметрическое семейство с параметром λ вида

$$(A - \lambda)x^2 + 2Bxy + (C - \lambda)y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

состоит из линий 2-го порядка с осями симметрии, параллельными друг другу. Это очевидно следует из формулы $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{A - C}{2B}$, где φ — угол поворота, необходимого для перевода исходной прямоугольной системы координат в каноническую.

3) Пусть $G_k(x, y) = 0 \quad k = \overline{1, n}$ — уравнения линий 2-го порядка вида (1), имеющие m общих точек. Тогда уравнение

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k(x, y) = 0$$

также описывает линию, проходящую через эти m точек, где $\lambda_k \quad k = \overline{1, n}$ не равные нулю одновременно, вещественные параметры.

Разумеется, этот список далеко не исчерпывающий. Обратим лишь внимание, что предметом дальнейшего нашего рассмотрения будет именно случай 3).

Рассмотрим пример 3) подробнее.

Поскольку в этой задаче уравнение (1) имеет шесть, подлежащих определению коэффициентов, среди которых по крайней мере один из A, B или C должен быть ненулевым, то ясно, что при $n \leq 5$ данная задача может иметь неединственное решение, а для числа точек больше пяти — оказаться неразрешимой.

Для получения условий однозначной разрешимости данной задачи воспользуемся известными теоремами из теории систем линейных уравнений.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче коэффициенты уравнения (1) должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^2 & 2x_ny_n & y_n^2 & 2x_n & 2y_n & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array} \right\| , \qquad (3)$$

где $\{x_k;\, y_k\}$ $\quad k = \overline{1, n}$ — координаты заданных (различных!) точек.

Понятно, что нас будут интересовать только нетривиальные решения уравнения (3).

`Важно:` система (3), неизвестными в которой являются коэффициенты уравнения (1), всегда имеет нулевое решение (называемое для краткости *тривиальным*). Уравнение (1), коэффициенты которого равны нулю, есть уравнение всей координатной плоскости Oxy (а не линии 2-го порядка).

Это позволяет установить изоморфизм между множеством уравнений (1) и множеством 6-ти компонентных столбцов вида

$$\| \, A, \, B, \, C, \, D, \, E, \, F \, \|^{\mathrm{T}} .$$

Множество всех частных решений однородной системы (3), как известно из курса линейной алгебры, является конечномерным подпространством, размерность которого равна рангу фундаментальной матрицы этой системы.

`Важно :` уравнения с пропорциональными коэффициентами очевидно задают одну и ту же линию 2-го порядка.

Рассмотрим следующие вспомогательные леммы. Их доказательства приводится в Приложении 1. Лемму 4 докажите самостоятельно.

Лемма 1 **Через любые пять точек плоскости можно провести линию 2-го порядка.**

Лемма 2 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, четыре из которых лежат на одной прямой, можно провести бесконечно много линий 2-го порядка.**

Лемма 3 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, три из которых принадлежат одной прямой, а любые четыре не лежат на одной прямой, можно провести линию 2-го порядка и притом только одну.**

Лемма 4 n**-е уравнение системы (3) является линейной комбинацией первых** $n-1$ **уравнений тогда и только тогда, когда любая линия 2-го порядка, проходящая через точки с координатами** $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\} \ldots \{x_{n-1}, y_{n-1}\}$, **проходит через точку с координатами** $\{x_n, y_n\}$.

Указание: утверждение леммы 4 очевидным образом следует из того факта, что, если система (3) содержит зависимое уравнение, то при его «вычеркивании», получается система эквивалентная исходной.

Лемма 5 **При** $1 < n < 4$ **система (3) не имеет линейно зависимых уравнений, если все точки различны.**

Лемма 6 **При** $4 \le n \le 5$ **система (3) имеет линейно зависимые уравнения тогда и только тогда, когда хотя бы четыре различные точки лежат на одной прямой.**

Теперь сформулируем обобщение леммы 1.

Теорема 3 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, любые четыре из которых не лежат на одной прямой, можно провести линию 2-го порядка и притом только одну.**

Доказательство теоремы 3 приводится в Приложении 1.

Дадим также

Определение 2	Совокупность *всех* линий 2-го порядка, проходящих через заданный набор n точек, любые четыре из которых не не принадлежат одной прямой, будем называть *n-точечным пучком*. Для некоторого, определенного каким-то образом подмножества линий в пучке, будем использовать термин *семейство линий*.

Из теоремы 3 следует, что 5-ти точечный пучок состоит всегда только из одной линии, а 6-ти и более точечный может оказаться пустым.

Рассмотрим, скажем, такой пример:

$$\begin{array}{lcl} G_1(x,y) & = & x^2 = 0\,; \\ G_2(x,y) & = & y^2 = 0\,; \\ G(x,y) & = & \alpha x^2 + \beta y^2 = 0, \quad \alpha^2+\beta^2 > 0\,. \end{array}$$

Понятно, что линии $G_1(x,y)=0$ и $G_2(x,y)=0$ принадлежат одноточечному пучку линий, проходящих через начало координат. При этом порождаемое ими параметрическое семейство с этим пучком не совпадает. Действительно, парабола $x^2+y=0$ принадлежит пучку, но в семейство не входит.

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно Уточним понятие семейства линий 2-го порядка, дав

Определение 3	Пусть задан набор состоящий из n линий 2-го порядка $\quad G_k(x,y)=0 \quad k=\overline{1,n}$. Множество линий 2-го порядка, уравнение которых имеет вид $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k(x,y) = 0, \qquad (4)$$ где $\lambda_k \in \mathbb{R} \quad k=\overline{1,n}$, назовем *$n$-параметрическим семейством* линий 2-го порядка, порождаемым набором $\quad G_k(x,y)=0 \quad k=\overline{1,n}$.

Получим теперь ответ на вопрос: каким должно быть семейство линий 2-го порядка, чтобы оно совпадало с пучком, в который оно входит?

Рассмотрим систему линейных уравнений (3) при $n \leq 4$. В случае $n = 4$ потребуем, чтобы данные четыре точки не принадлежали одной прямой.

Пусть Φ — фундаментальная матрица системы (3). Тогда имеем $\mathrm{rg}\Phi = 6 - n$, а ее столбцы суть коэффициенты фундаментальных уравнений линий из пучка.

Эти уравнения линейно независимые в силу определения фундаментальной матрицы. При этом уравнение любой другой линии из пучка представимо как линейная комбинация фундаментальных уравнений. Следовательно, система (3) задает пучок целиком.

Таким образом, для того, чтобы параметрическое семейство совпадало с n-точечным пучком, в который оно входит, необходимо и достаточно, чтобы это семейство содержало $6 - n$ линий пучка с линейно независимыми уравнениями.

Так в последнем из рассмотренных примеров для совпадения семейства с пучком потребуется пять линий с линейно независимыми уравнениями.

О прохождении линии 2-го порядка через четыре заданные точки плоскости

Для теоремы 3 оказывается справедливым, полезное для приложений,

`Следствие 1` **Пусть $F_k(x,y) = 0 \quad k \in \overline{1,3}$ суть уравнения линий 2-го порядка (где первые два — уравнения несовпадающих линий), проходящих через четыре заданные точки, любые три из которых не лежат на одной прямой. Тогда $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, такие, что**

$$F_3(x,y) = \lambda F_1(x,y) + \mu F_2(x,y) = 0\,. \tag{5}$$

То есть параметрическое семейство (5) всегда будет совпадать с 4-х точечным пучком. Доказательство следствия 1 приведено в Приложении 1.

Далее (для краткости) под пучком мы будем будем понимать 4-х точечный пучок.

Тип линии (согласно табл. 1) определяется сигнатурой числа Δ, находимого по формуле (2).
Проанализируем теперь, какие линии входят в пучок (4). Их тип, согласно формуле (2), описывается знаком выражения

$$\Delta(\lambda,\mu) = \det\left(\lambda \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{matrix} \right\| + \mu \left\| \begin{matrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$= (\lambda A_1 + \mu A_2)(\lambda C_1 + \mu C_2) - (\lambda B_1 + \mu B_2)^2 =$$
$$= \lambda^2 (A_1 C_1 - B_1^2) + \lambda\mu(A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2B_1 B_2) + \mu^2 (A_2 C_2 - B_2^2)$$

То есть функция $\Delta(\lambda,\mu)$ является однородной по $\{\lambda;\mu\}$, второго порядка. Поэтому пучок (5) может содержать не более двух линий параболического типа, для которых $\Delta(\lambda,\mu) = 0$.

`Упражнение 1` Докажите, что, если пучок содержит две параболы, то их оси всегда не параллельны.

Введем, полезное для дальнейшего, специальное обозначение. Пусть даны $A_k \quad k \in \overline{1,4}$ — различные точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, а $L_{ij}(x,y) = 0$ есть уравнение прямой, проходящей через точки A_i и $A_j \quad i,j \in \overline{1,4}$.

Задача 1 *Пусть P точка пересечения высот в треугольнике KMN. Доказать, что гиперболы, проходящие через точки K, M, N и P, имеют перпендикулярные асимптоты.*

Решение. По условию задачи $KM \perp NP$ и $KN \perp MP$, тогда во введенных обозначениях имеем $L_{KM}L_{NP} = 0$ и $L_{KN}L_{MP} = 0$. Каждое из этих равенств есть уравнение 2-го порядка вида (1), у которого $A + C = 0$.

Поскольку в силу теоремы 4 все линии 2-го порядка, проходящие через точки K, M, N и P, имеют уравнения вида:

$$\alpha L_{KM}L_{NP} + \beta L_{KN}L_{MP} = 0\,, \tag{6}$$

то в (6) $\forall \alpha, \beta$ при приведении к форме (1) также получится $A + C = 0$.

Следовательно (проверьте это самостоятельно), все линии этого семейства гиперболического типа и с $A+C = 0$, а гиперболы с $A + C = 0$ имеют перпендикулярные асимптоты.

Решение получено.

Упражнение 2 Подумайте также над вопросом: возможно ли, чтобы пучок состоял только из линий 2-го порядка

а) эллиптического типа,

б) гиперболического и параболического типов?

Задача 2 В ортонормированной системе координат заданы точки: $A_1 = \| 3 \;\; 1 \|^{\mathrm{T}}$, $A_2 = \| -2 \;\; 3 \|^{\mathrm{T}}$, $A_3 = \| -1 \;\; 0 \|^{\mathrm{T}}$ и $A_4 = \| 2 \; -2 \|^{\mathrm{T}}$. Требуется построить параметрическое описание семейства линий 2-го порядка, проходящих через эти точки.

Решение. Пусть в ортонормированной системе координат заданы точки: $A_1 = \| 3 \;\; 1 \|^{\mathrm{T}}$, $A_2 = \| -2 \;\; 3 \|^{\mathrm{T}}$, $A_3 = \| -1 \;\; 0 \|^{\mathrm{T}}$ и $A_4 = \| 2 \; -2 \|^{\mathrm{T}}$, для которых линейные функции, указанные в формулировке теоремы 4, имеют (проверьте это самостоятельно!) вид:

$$
\begin{aligned}
L_{12}(x,y) &= 2x + 5y - 11,\\
L_{23}(x,y) &= 3x + \ \ y + \ \ 3,\\
L_{34}(x,y) &= 2x + 3y + \ \ 2,\\
L_{41}(x,y) &= 3x - \ \ y - \ \ 8.
\end{aligned}
$$

Тогда параметрическое представление семейства линий 2-го порядка, проходящих через данные точки будет таким:

$$\alpha(2x + 5y - 11)(2x + 3y + 2) + \beta(3x + y + 3)(3x - y - 8) = 0.$$

На рис.1 приведены графические представления некоторых членов этого семейства:

— *красным* цветом показан эллипс, получающийся при $\alpha = \beta = 1$;

— *зеленым цветом — гипербола с* $\alpha = 1$ *и* $\beta = -3$ *(зелеными* штриховыми линиями показаны ее асимптоты);

— *синим* цветом — парабола, у которой значения параметров $\alpha = \dfrac{131 + \sqrt{17017}}{8}$ и $\beta = 1$;

— *серым* цветом — пара пересекающихся прямых с $\alpha = -1$ и $\beta = 1$.

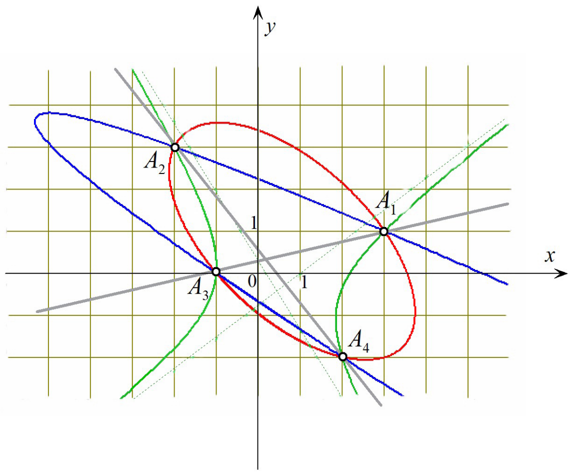

Рис. 1. Некоторые линии 2-го порядка параметрического семейства $\alpha(2x + 5y - 11)(2x + 3y + 2) + \beta(3x + y + 3)(3x - y - 8) = 0.$.

Если $\beta = 0$, то $\Delta = -4\alpha^2$, и очевидно, что $\Delta < 0$. При $\beta \neq 0$ полученный трехчлен раскладывается на множители

$$\Delta = -4\beta^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} - k_1\right)\left(\frac{\alpha}{\beta} - k_2\right), \tag{7}$$

где числа k_1 и k_2 суть корни квадратного уравнения $k^2 - \frac{131}{4}k + \frac{9}{4} = 0$, равные соответственно

$$k_1 = \frac{131 + \sqrt{17017}}{8} \approx 32.681;$$

$$k_2 = \frac{131 - \sqrt{17017}}{8} \approx 0.069.$$

В рассматриваемом примере $A = 4\alpha + 9\beta$, $B = 8\alpha$ и $C = 15\alpha - \beta$, поэтому

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{ll} 4\alpha + 9\beta & 8\alpha \\ 8\alpha & 15\alpha - \beta \end{array} \right\| = -4\alpha^2 + 131\alpha\beta - 9\beta^2.$$

Из (7) следует, что мы имеем линии 2-го порядка *параболического* типа, для $\alpha = k_1\beta$ или для $\alpha = k_2\beta$. Если четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ трапеция, то эта линия одна парабола и *пара параллельных прямых* или же две таких пары.

Иначе (как это оказывается в нашем примере) это две параболы. В деталях предлагаем разобраться самостоятельно. Если внутренности круглых скобок в (7) имеют разные знаки, то тип линии — *эллиптический*, а сама линия будет *эллипсом.* Другие виды эллиптического типа невозможны, поскольку данные точки несовпадающие.

Наконец, если внутренности скобок имеют одинаковые знаки, то искомая линия 2-го порядка принадлежит *гиперболическому* типу.

При этом линия будет *гиперболой*, за исключением случаев $\alpha\beta = 0$ или $\alpha = -\beta$, когда она оказывается *парой пересекающихся прямых.*

Решение получено

На рис.2 графически показана зависимость типа и вида линии 2-го порядка от значений параметров α и β в задаче 2.

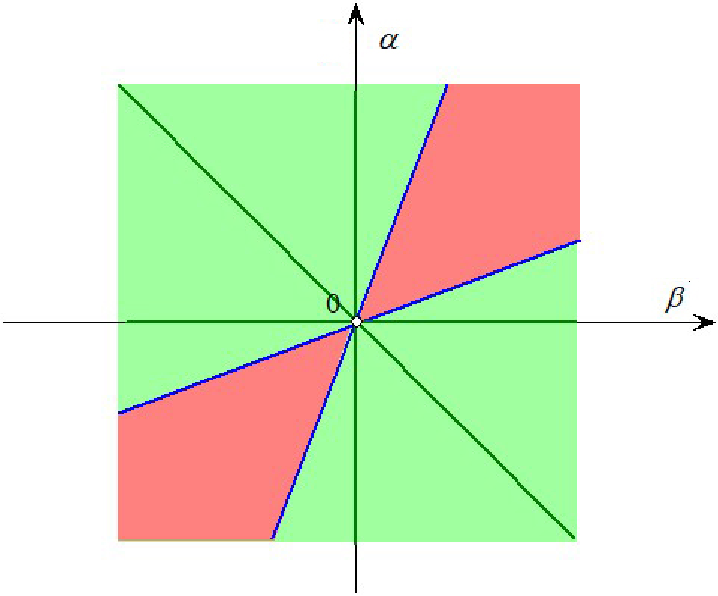

Рис. 2. Зависимость типа и вида линии 2-го порядка от значений α и β

Точки на плоскости $\{0\alpha\beta\}$ окрашены разными цветами в зависимости от типа и вида линии 2-го порядка:

— *розовым* цветом отмечены случаи *эллипсов*;

— *синим* цветом — *параболические случаи*, то есть точки на $\{0\alpha\beta\}$, которые лежат на прямых: либо $\alpha = k_1\beta$, либо $\alpha = k_2\beta$;

— *светло-зеленым* цветом — случаи *гипербол*;

— *зеленым* цветом — случаи *пар пересекающихся прямых*, относящиеся к гиперболическому типу, то есть точки на плоскости $0\alpha\beta$, которые принадлежат одной из трех прямых $\beta = 0,\ \alpha = 0$ и $\beta = -\alpha$.

Задача 3 *Две параболы, оси которых перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.*

`Решение.` Выберем систему координат, в которой оси симметрии парабол лежат на координатных осях, а уравнения парабол имеют вид:

$$y^2 = 2p(x - x_0) \qquad \text{и} \qquad x^2 = 2q(y - y_0)\,, \tag{8}$$

где $p > 0$, $q > 0$, $x_0 < 0$ и $y_0 < 0$ (см. рис.3).

Если воспользоваться следствием 1 и построить линейную комбинацию из уравнений (8), которая окажется уравнением окружности, то задача будет решена.

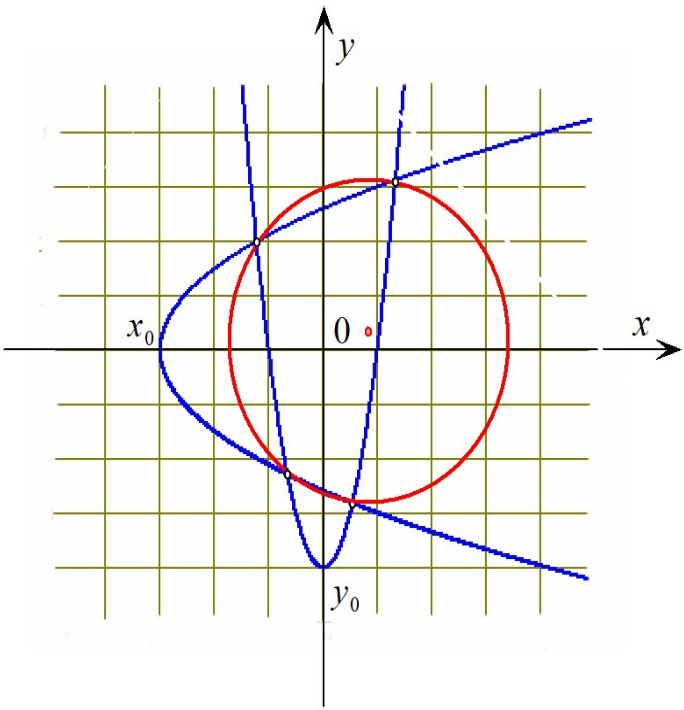

Рис. 3. К решению задачи 3

Если положить в формуле (4) $\lambda = \mu = 1$, то получим

$$\lambda\left(y^2 - 2p(x - x_0)\right) + \mu\left(x^2 - 2q(y - y_0)\right) =$$

$$= x^2 - 2p(x - x_0) + y^2 - 2q(y - y_0) = 0\,.$$

Откуда

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = -2px_0 + p^2 - 2qy_0 + q^2\,,$$

что является уравнением окружности в ОНСК:

Решение получено.

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = \underbrace{-2px_0 - 2qy_0}_{>0} + p^2 + q^2 = R^2\,.$$

Упражнение 3 *Докажите обобщение утверждения, содержащегося в условии задачи 3:*

пусть две линии второго порядка имеют четыре общие точки. Эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси данных линий перпендикулярны.

Используя данное параметрическое описание семейства линий 2-го порядка, за счет выбора значений параметров α и β можно получать уравнения линий 2-го порядка с определенными геометрическими свойствами.

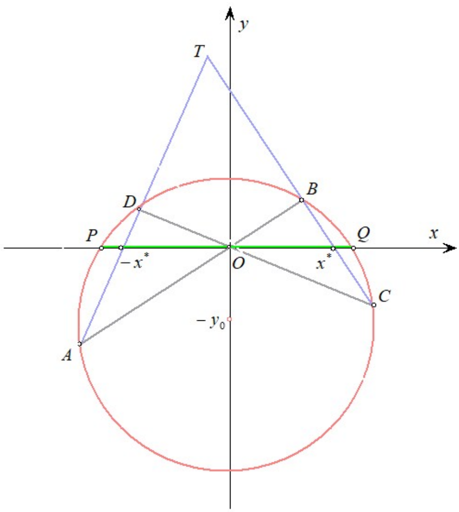

Рис. 4. К решению задачи 4

Рассмотрим другие задачи, демонстрирующие полезность параметрических семейств линий 2-го порядка.

Задача 4 *«Теорема о бабочке»* *Дана окружность, в которой хорды AB и CD пересекают хорду PQ в точке O — ее середине. Доказать, что хорды AD и CB пересекают PQ точках равноудаленных от O.*

Решение. Линии 2-го порядка: окружность ω радиусом R и две пары пересекающихся прямых $f: \ L_{AB}L_{CD}$ и $g: \ L_{AT}L_{CT}$ очевидно принадлежат одному семейству линий 2-го порядка. Поэтому, согласно следствию 1, $\quad g = \omega + \lambda f$.

Выберем такую декартову систему координат, что ее начало находится в точке O (см. рис.4), а отрезок PQ лежит на оси Ox. Тогда

$$\begin{array}{rcl} \omega(x,y) & = & x^2 + (y + y_0)^2 - R^2, \\ f(x,y) & = & (x + py)(x + qy), \end{array}$$

где p и q — некоторые константы.

Поскольку

$$g(x,y) = \omega(x,y) + \lambda f(x,y)$$

верно при любых y, то будут верными и

$$g(x,0) = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad x^2 + \lambda(x^2 + y_0^2 - R^2) = 0.$$

\- Корни последнего уравнения суть абсциссы точек пересечения хорды PQ с хордами AD и CB.

Эти корни: $\pm x^*$, равны по модулю и имеют различные знаки, откуда и следует справедливость доказываемого утверждения.

Решение получено.

Задача 5 *Уравнения диагоналей квадрата суть*

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & 8y & = & 38, \\ 8x & + & y & = & 44, \end{array}$$

а длина его стороны $\sqrt{130}$. Найти уравнения сторон квадрата.

`Решение.` 1°. Рассмотрим задачу в ортонормированной системе координат, в которой диагонали квадрата оказываются на координатных осях, а начало координат $0'$ есть точка пересечения диагоналей (см. рис.5).

Координаты точки $0'$ — нового начала координат — находим, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 8y = 38, \\ 8x + y = 44. \end{cases}$$

Получаем $0'\{6; -4\}$.

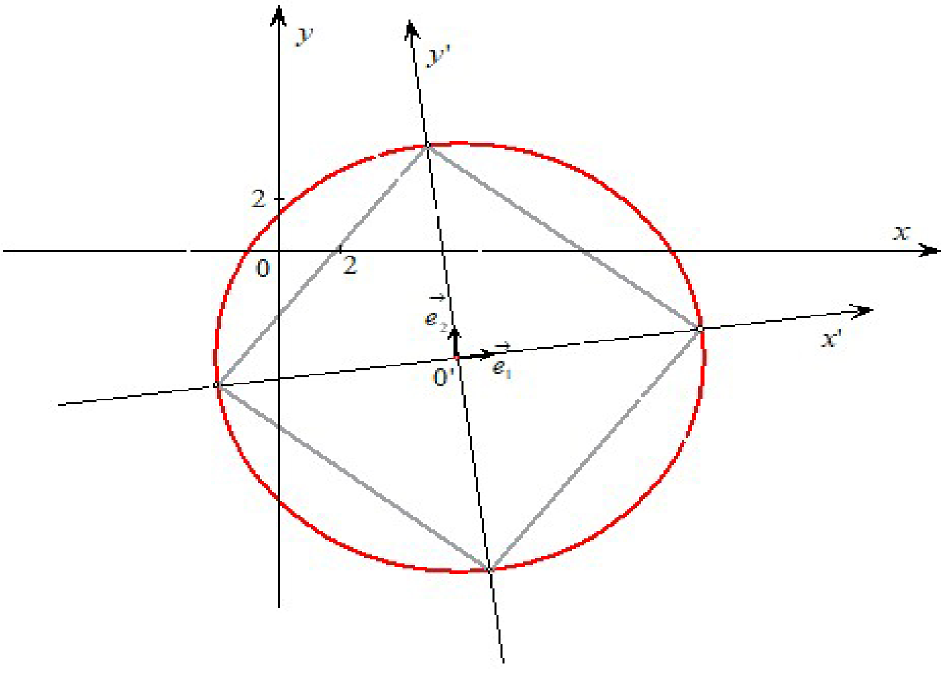

Рис. 5. К решению задачи 5

В качестве новых базисных векторов возьмем нормированные направляющие векторы диагоналей квадрата. Поскольку для прямой $Ax+By+C=0$ направляющим может служить вектор $\|-B\ A\|^{\mathrm{T}}$, то за базисные примем векторы $\left\|\vec{e}_1^{\,\prime}\right\| = \left\|\frac{8}{\sqrt{65}}\ \frac{1}{\sqrt{65}}\right\|^{\mathrm{T}}$ и $\left\|\vec{e}_2^{\,\prime}\right\| = \left\|-\frac{1}{\sqrt{65}}\ \frac{8}{\sqrt{65}}\right\|^{\mathrm{T}}$.

Следовательно, *формулы перехода* от исходной ортонормированной системы координат к новой будут иметь вид:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & \frac{8}{\sqrt{65}}x' & - & \frac{1}{\sqrt{65}}y' & + & 6, \\ y & = & \frac{1}{\sqrt{65}}x' & + & \frac{8}{\sqrt{65}}y' & - & 4. \end{array}\right. \tag{9}$$

2°. Рассмотрим теперь параметрическое семейство линий 2-го порядка, проходящих через четыре точки — вершины квадрата.

Одной из линий данного семейства является *пара пересекающихся прямых*, на которых лежат диагонали квадрата. Она принадлежит гиперболическому типу.

Другой является *окружность* радиусом $\sqrt{65}$ с центром в точке пересечения диагоналей. Это — эллиптический тип.

Наконец, имеются две *пары параллельных прямых*, на которых лежат несмежные стороны квадрата. Тут тип параболический. Заметим, что целью задачи является отыскание уравнений этих параллельных прямых.

3°. Воспользуемся теперь следствием 1 для построения *линейной комбинации* (из известных уравнений этого семейства), являющейся искомым уравнением прямых, на которых лежат стороны квадрата.
В исходной системе координат уравнение пары пересекающихся прямых, на которых лежат диагонали будет

$$(x-8y-38)(8x+y-44)=0.$$

Проверьте самостоятельно, что в силу (9) это уравнение в новой системе координат примет вид:

$$x'y'=0\,.$$

Уравнение окружности, проходящей через вершины квадрата, в новой системе координат очевидно:

$$x'^2+y'^2=65.$$

Тогда, по следствию 1, искомое уравнение в новой системе координат имеет вид:

$$\lambda(x'^2 + y'^2 - 65) + \mu\, x'y' = 0. \tag{10}$$

$\lambda = 0$ здесь не дает решения, поскольку в этом случае уравнение определяет лишь линии гиперболического типа.
Поэтому положим в (10) $\lambda = 1$ и найдем, при каких μ оно определяет линии параболического типа. Тогда из уравнения

$$\Delta = \det \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2}\mu & 1 \end{matrix} \right\| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \pm 2.$$

Это дает уравнения

$$(x' + y')^2 = 65 \qquad \text{и} \qquad (x' - y')^2 = 65\,. \tag{11}$$

А, поскольку вершины квадрата лежат на параллельных прямых, то другие случаи линии параболического типа (парабола или совпадающие прямые) здесь невозможны.

3°. Найдем теперь вид этих уравнений в исходной системе координат.

Поскольку обе системы координат ортонормированные, то матрицы прямого и обратного переходов для них ортогональные. Используя этот факт, из (9) получаем

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & \frac{8}{\sqrt{65}}x & + & \frac{1}{\sqrt{65}}y & - & \frac{44}{\sqrt{65}}, \\ y' & = & -\frac{1}{\sqrt{65}}x & + & \frac{8}{\sqrt{65}}y & + & \frac{38}{\sqrt{65}}. \end{array} \right.$$

Наконец, подстановка этих выражений в (11) дает искомые уравнения пар параллельных прямых

Решение получено.

$$\left[\begin{array}{rcrcr} 9x & - & 7y & = & 147, \\ 9x & - & 7y & = & 17 \end{array} \right. \qquad \text{и} \qquad \left[\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 9y & = & 71, \\ 7x & + & 9y & = & -59. \end{array} \right.$$

Задача 6 *«Теорема Паскаля»*

Если несовпадающие точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ лежат на линии 2-го порядка ω, то точки пересечения (если такие существуют) прямых L_{12} и L_{45}, L_{23} и L_{56}, L_{34} и L_{16} лежат на одной прямой.

Решение. Каждый набор четырех точек из шести данных порождает пучок линий 2-го порядка, которому принадлежит линия ω. Выберем среди них два пучка, содержащие точки A_1, A_2, A_3, A_4 и A_6, A_1, A_4, A_5 соответственно.
Уравнения линии ω в этих пучках будут

$$\begin{aligned} \omega: &\quad \alpha_1 L_{12} L_{34} + \beta_1 L_{14} L_{23} = 0\,, \\ \omega: &\quad \alpha_2 L_{16} L_{45} + \beta_2 L_{14} L_{56} = 0\,. \end{aligned}$$

Вычитая эти уравнения почленно, получаем

$$\alpha_2 L_{16} L_{45} - \alpha_1 L_{12} L_{34} + L_{14}\big(\beta_2 L_{56} - \beta_1 L_{23}\big) = 0\,.$$

Если в последнее равенство подставить координаты точки $A^* : \begin{cases} L_{16} = 0\,, \\ L_{34} = 0\,, \end{cases}$ то мы получим, что точка A^* принадлежит прямой с уравнением $\Omega :\ \beta_2 L_{56} - \beta_1 L_{23} = 0$. Это верно, поскольку точка A^* не принадлежит прямой с уравнением $L_{14} = 0$, что было бы возможно только при совпадении точек A_1 и A_4.

Рассуждая аналогично, мы получим, что точка $A^{**} : \begin{cases} L_{12} = 0\,, \\ L_{45} = 0\,, \end{cases}$ также принадлежит прямой Ω.

Наконец, отметим, что точка $A^+ : \begin{cases} L_{23} = 0\,, \\ L_{56} = 0\,, \end{cases}$ принадлежит прямой Ω по определению функции $L_{ij}(x,y)$. Значит, на этой прямой лежат три точки: A^*, A^{**} и A^+.

Решение получено.

Прямая Ω называется *прямой Паскаля.*

Заметим также, что в условии не оговаривается, имеет ли замкнутая линия $\overline{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6}$ точки самопересечения или нет. При этом разный порядок нумерации точек дает, вообще говоря, разные прямые Паскаля.

Параметрические семейства линий второго порядка могут оказаться полезными для решения не только геометрических задач.

Примером такого случая может служить задача выбора замены неизвестной, приводящей к понижению порядка решаемого уравнения.

Пусть требуется решить уравнение 4-го порядка

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,, \tag{12}$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

К настоящему времени известен ряд методов решения уравнения (12). Это, например, метод Феррари, который как и другие методы, основывается на решении резольвенты — вспомогательного уравнения 3-й степени.

Рассмотрим метод построения резольвенты при помощи параметрического семейства линий второго порядка.

Нетрудно проверить, что уравнение (12) и система уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} y - x^2 & = & 0, \\ y^2 + axy + by + cx + d & = & 0 \end{array}\right. \tag{13}$$

равносильны.

Пусть уравнения системы (13) суть уравнения линий 2-го порядка, левые части которых обозначим как f и g соответственно.

Решить систему (13), и, следовательно, уравнение (12), означает: найти координаты точек пересечения линий $f = 0$ и $g = 0$. Заметим, что в (13) вторую линию $g = 0$ можно заменить линией $\lambda f + g = 0$, где λ есть некоторый вещественный параметр. При этом решения (13) останутся теми же, что и раньше.

Однако, если в (13) вторая линия *вырожденная*, то решение системы (13) сводится к поиску лишь корней некоторых квадратных уравнений. Условие вырожденности линии $\lambda f + g = 0$

$$\lambda\Big(y - x^2\Big) + y^2 + axy + by + cx + d = 0$$

или

$$-\lambda x^2 + axy + y^2 + cx + (b + \lambda)y + d = 0\,,$$

в силу теоремы 2 имеет вид равенства

$$\det\begin{Vmatrix} -2\lambda & a & c \\ a & 2 & b+\lambda \\ c & b+\lambda & -2d \end{Vmatrix} = 0\,,$$

которое есть кубичное уравнение относительно параметра λ.

Полученное уравнение имеет вид

$$\lambda^3 + 2b\lambda^2 + (ac + b + 4d)\lambda + da^2 + abc - c^2 = 0 \tag{14}$$

является искомой резольвентой.

Действительно, пусть λ есть корень (14). В этом случае $\lambda f + g = 0$ есть уравнение вырожденной линии второго порядка, левая часть которого раскладывается на два линейных множителя. Тогда, использование равенства $y = x^2$ позволяет найти корни (12), решив лишь два квадратных уравнения.

Приложение 1.
Доказательства лемм и теорем

Лемма 1 **Через любые пять точек плоскости можно провести линию 2-го порядка.**

Доказательство.

Линиям 2-го порядка, проходящим через данный набор точек, соответствуют нетривиальные решения системы (3).

Система (3) однородная. Число ее уравнений меньше числа неизвестных. Поэтому такие системы (3) имеют нетривиальные решения. Откуда следует *существование* линии 2-го порядка, проходящей через данные точки.

Лемма доказана.

Лемма 2 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, четыре из которых лежат на одной прямой, можно провести бесконечно много линий 2-го порядка.**

Доказательство.

Пусть четыре точки из пяти лежат на прямой $ax + by + c = 0$, где числа a, b и c определены однозначно. И пусть прямая $a'x + b'y + c' = 0$ проходит через пятую точку, для которой имеется бесконечно много вариантов значений чисел a', b' и c'. Тогда любая линия 2-го порядка вида

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

проходит через все пять заданных точек.

Лемма доказана.

Лемма 3 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, три из которых принадлежат одной прямой, а любые четыре не лежат на одной прямой, можно провести линию 2-го порядка и притом только одну.**

Доказательство.

Поскольку невырожденная линия 2-го порядка может иметь не более двух точек пересечения с любой прямой, то рассматриваемая линия 2-го порядка вырожденная.
Вырожденная линия в рассматриваемом случае является объединением двух прямых (быть может, параллельных), одна из которых проходит через три, лежащие на одной прямой, три точки. А вторая проходит через две оставшиеся.
Откуда следует *единственность* такой линии 2-го порядка.

Лемма доказана.

Лемма 5 **При $1 < n < 4$ система (3) не имеет линейно зависимых уравнений, если все точки различны.**

Доказательство.

Для двух различных точек плоскости очевидно всегда существует линия 2-го порядка, проходящая через первую из них и не проходящую через вторую. В силу леммы 4 в этом случае уравнения системы (3) линейно независимые.
Справедливость этого утверждения для случая трех точек, не лежащих на одной прямой, доказывается аналогичными рассуждениями.
Из леммы 3 следует единственность линии 2-го порядка, проходящей через три точки некоторой прямой и две различные точки на этой прямой не лежащих.
Тогда в силу леммы 4, уравнения системы (3), соответствующие первым трем точкам, линейно независимы.

Лемма доказана.

Лемма 6 **При $4 \leq n \leq 5$ система (3) имеет линейно зависимые уравнения тогда и только тогда, когда хотя бы четыре различные точки лежат на одной прямой.**

Доказательство.

Достаточность непосредственно следует из лемм 2 и 4.

Докажем необходимость.
Пусть $n = 5$ и пусть никакие три из них не лежат на одной прямой. Тогда четыре из них будут являться вершинами (быть может, невыпуклого, см. задачу 1) четырехугольника.

Доказательство.

Пары прямых, на которых лежат несмежные стороны этого четырехугольника, будут линиями 2-го порядка гиперболического или же параболического типов. Каждая из этих пар проходит через данные четыре точки. Других общих точек для них нет, что противоречит лемме 4.
Случай, когда три точки из пяти лежат на одной прямой, а никакие четыре — нет, противоречит лемме 4 в силу леммы 3. В итоге остается только случай, когда четыре точки лежат на одной прямой.

Лемма доказана.

Теорема 3 **Через любые пять несовпадающих точек плоскости, любые четыре из которых не лежат на одной прямой, можно провести линию 2-го порядка и притом только одну.**

Доказательство.

Существование такой линии доказывается в лемме 1. Ее единственнось следует из лемм 4 и 6.

Теорема доказана.

Следствие 1 **Пусть $F_k(x, y) = 0 \quad k \in \overline{1,3}$ суть уравнения линий 2-го порядка (где первые два — уравнения несовпадающих линий), проходящих через четыре заданные точки, любые три из которых не лежат на одной прямой. Тогда $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, такие, что**

$$F_3(x, y) = \lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0\,. \tag{5}$$

Доказательство.

Если F_3 совпадает с F_1 или с F_2, то утверждение следствия 1 очевидно.

В противном случае возьмем точку с координатами $\{x_5,\, y_5\}$, отличную от каждой из точек $\{x_i,\, y_i\}\,,\ i = \overline{1,4}$. Полученная совокупность пяти точек удовлетворяет теореме 3. Значит, через них проходит единственная линия 2-го порядка.

Точка $\{x_5,\, y_5\}$ не принадлежит, ни F_1 ни F_2 , поэтому как $F_1(x_5,\, y_5) \neq 0$, так и $F_2(x_5,\, y_5) \neq 0$. Значит, из условия (5), при подстановке в него координат $\{x_5,\, y_5\}$, можно найти числа λ и μ, определяющие вид уравнения (5).

Следствие доказано.

Приложение 2.
Решение упражнений

Упражнение 1 *Докажите, что, если пучок содержит две параболы, то их оси всегда не параллельны.*

Решение. Разные параболы из одного пучка должны иметь четыре общие точки. Для парабол с параллельными осями это очевидно не верно.

Заметим, что аналогичное рассуждение применимо в случае, когда рассматриваются парабола и пара параллельных прямых, или же две пары параллельных прямых.

Решение получено.

Упражнение 2 *Подумайте также над вопросом: возможно ли, чтобы пучок состоял только из линий 2-го порядка*

а) эллиптического типа,

б) гиперболического и параболического типов?

Решение. а) Ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, через любые четыре точки можно провести пару пересекающихся прямых. Поэтому любой пучок содержит линии гиперболического типа.

Более того, если пучок содержит эллипс, то в силу непрерывности функции $\Delta(\lambda, \mu)$ он будет содержать (как промежуточный случай эллиптического и гиперболического видов) две линии параболического вида.

б) Здесь придется рассмотреть два случая.

1. Если среди четырех определяющих пучок точек, три лежат на одной прямой, то ответ положительный.

   Действительно, линии такого пучка состоят только из вещественных прямых. Поэтому эллиптический тип тут отсутствует.

   С другой стороны, через любые четыре такие точки можно провести пару параллельных и пару пересекающихся прямых (линии как параболического, так и гиперболического типов).

2. Если среди четырех определяющих пучок точек, никакие три не лежат на одной прямой, то их можно рассматривать как вершины четырехугольника.

   Но известно, что любой четырехугольник, вершины которого лежат на границе выпуклого множества, также выпуклый. Внутренности параболы и пары параллельных прямых — выпуклые множества. Поэтому четырехугольник, образованный общими точками пучка, также выпуклый.

   Известно также, что вокруг любого выпуклого четырехугольника можно описать эллипс.

   Действительно, аффинным преобразованием всегда можно добиться того, что сумма противоположных внутренних углов в четырехугольнике была равна π. А это является необходимым и достаточным условием вписываемости четырехугольника в окружность.

   Значит, если пучок содержит линию параболического типа, то он содержит и эллиптическую линию. В силу чего ответ отрицательный.

`Решение получено.`

Таким образом видно, что для любого пучка линий 2-го порядка, проходящих через четыре заданные точки, возможны лишь три случая:

1) если точки образуют выпуклый четырехугольник, то пучок состоит из пары линий параболического типа и бесконечных множеств, как эллиптического, так и гиперболического типов.

2) в случае невыпуклого четырехугольника пучок состоит только из линий гиперболического типа.

3) наконец, если точки четырехугольника не образуют, то пучок состоит только из вырожденных линий, одна из которых параболического, а остальные гиперболического типов.

`Упражнение 3`

Докажите следующее обобщение утверждения, содержащегося в условии задачи 3:
пусть две линии второго порядка имеют четыре общие точки. Эти точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда оси данных линий перпендикулярны.

Решение. Достаточность. Пусть пучок образован двумя линиями 2-го порядка со взаимно перпендикулярными осями и имеет уравнение $f = \lambda f_1 + \mu f_2$. Перейдем в прямоугольную систему координат, оси которой параллельны осям линий $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$. Очевидно, что для них коэффициенты B в (1) равны нулю. Тогда и для любой линии в этом пучке $B = 0$. Теперь подберем λ и μ так, чтобы в уравнении линии $f = 0$ было $A = C$. Это дает

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda C_1 + \mu C_2 \;\Leftrightarrow\; \lambda(A_1 - C_1) + \mu(A_2 - C_2) = 0. \quad (16)$$

При $\mu = 0$ и $\lambda \neq 0$ линия $f_1 = 0$ будет окружностью. Аналогично, при $\mu \neq 0$ и $\lambda = 0$ окружностью окажется линия $f_2 = 0$. В силу $B = 0$ и (16) достаточность доказана.

Необходимость. Данный пучок содержит окружность ω. То есть $\exists\ \lambda$ и $\exists \mu$ такие, что $\omega = \lambda f_1 + \mu f_2 = 0$.
Без ограничения общности можно считать, что $f_1 = 0$ не парабола и не окружность. (Покажите самостоятельно, что такая линия в пучке всегда найдется).
Выберем прямоугольную систему координат, в которой оси перпендикулярны осям линии $f_1 = 0$. Тогда $B_1 = 0$, а в силу $B_\omega = 0$ будет и $B_2 = 0$. Таким образом, оси линий $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ перпендикулярны.

Решение получено.

Литература.

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрия. М., «Наука», 1968. С. 912.

2. *Прасолов В.В., Тихомиров В.М.* Геометрия. М., МЦИМО, 2007. С. 328.

3. *Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М., МФТИ, 2024. С. 480.

Учебное издание

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Учебно-методическое пособие
по курсу *Аналитической геометрии и линейной алгебры*

Составитель **Умнов Егор Александрович**

Редактор
Корректор

Подписано в печать xx.xx.2025. Формат $60{\times}84$ $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж xxx экз. Заказ №

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail:rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: polygraph@mipt.ru