Обобщения простейшей вариационной задачи

Умнов Е.А.

Задача со свободным(и) концом (цами)

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \qquad (*)$$

Пусть на $y(x)$ достигается экстремум функционала $(*)$

Тогда $\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta) = \int_a^b F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\,dx$

ф-ция $\Phi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha=0$. Следовательно, $\Phi'_\alpha\Big|_{\alpha=0}=0$

$$\Phi'_\alpha = \int_a^b (F'_y\cdot\eta + F'_{y'}\cdot\eta')\,dx = \underbrace{\int_a^b \eta\left(F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'})\right)dx}_{I} + \eta\cdot F'_{y'}\Big|_a^b \underset{\text{при } \alpha=0}{=} 0 \qquad (**)$$

- Заметим, что при $\alpha=0$ $F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'})$ и $F'_{y'}$ от вариации $\eta(x)$ не зависят.
- Поскольку концы не закреплены, то допустимая вариация $\eta(x)$ на концах может принимать ненулевые значения.
- Пусть $\eta(a)=\eta(b)=0$. Тогда по аналогии с задачей с закрепленными концами $F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'})=0$. Но т.к. это выражение не зависит от $\eta(x)$, то равенство нулю сохранится и в случае, если $\eta(a)\neq0$, $\eta(b)\neq0$
- Следовательно, $\eta(x)\cdot F'_{y'}\Big|_a^b=0$ при $\alpha=0$
- пусть теперь $\eta(a)=0$, $\eta(b)\neq0 \Rightarrow \boxed{F'_{y'}\Big|_{x=b}=0}$ это „так называемое" условие трансверсальности на свободном конце.
- аналогично, $\eta(a)\neq0$, $\eta(b)=0 \Rightarrow F'_{y'}\Big|_{x=a}=0$

Таким образом, уравнение Эйлера сохраняет значение необходимого условия и в случае свободных концов; так же, допустимая экстремаль $y(x)$ на свободных концах должна удовлетворять условию трансверсальности.

Замечание: в отличие от задачи с закрепленными концами нельзя „выбрасывать" полную производную из подынтегрального выражения (хотя уравнение Эйлера от этого и не меняется).

Пример (§20.1, №9)

$$J(y)=\int_1^3 [8yy'\ln x - x(y')^2+6xy']\,dx\ ,\quad y(3)=15$$

$$F'_y = 8y'\ln x\ ,\qquad F'_{y'} = 8y\ln x - 2xy' + 6x \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 8y'\ln x + \frac{8y}{x} - 2y' - 2xy'' + 6$$

$$\cancel{8y'\ln x} = \cancel{8y'\ln x} + \frac{8y}{x} - 2y' - 2xy'' + 6 \qquad \Big|\cdot\frac{x}{2}$$

$$x^2y''+xy'-4y=3x \qquad // \text{ ур-е Эйлера; замена } x=e^t$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{y'_t}{x}$$

$$y''-\cancel{y'}+\cancel{y'}-4y=3e^t \qquad y''_x=\frac{y''_t-y'_t}{x^2}$$

$$\lambda^2-4=0 \Rightarrow y_0(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$$

$y_{ч.н.}=\alpha e^t$ (резонанса нет)

$$\alpha e^t(1-4)=3e^t,\ \alpha=-1$$

$$y(x)=C_1x^2+\frac{C_2}{x^2}-x$$

$$y'(x)=2C_1x-\frac{2C_2}{x^3}-1 \qquad (4)$$

Подставляем (4) в (3) при $x=1$ (условие трансверсальности)

$$8\underset{0}{\underset{\shortparallel}{y\ln 1}} - 2(2C_1-2C_2-1)+6=0$$

Второе условие на C_1 и C_2 получаем подстановкой значения $y(3)=15$:

$$9C_1+\frac{C_2}{9}-3=15$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ 9C_1+\frac{C_2}{9}=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1=2 \\ C_2=0 \end{matrix} \quad \Big| \Rightarrow \text{ допустимая экстремаль } y(x)=2x^2-x$$

Шаблон для приращения значения в квадратичной задаче остается верным и в случае наличия свободных концов:

$$\Delta J=\int_a^b (A\eta^2+2B\eta\dot\eta+C\dot\eta^2)\,dx$$

в нашем случае

$$\Delta J=\int_1^3 (8\eta\eta'\ln x - x\eta'^2)\,dx \ \boxed{=}$$

возьмем смешанный член по частям (с учетом, что $2\eta\eta'=(\eta^2)'$)

$$\boxed{=}\ \underset{0}{4\eta^2\cdot\ln x\Big|_1^3} + \int_1^3\left(-\frac{4\eta^2}{x}-x\eta'^2\right)dx<0$$

т.к. $\ln 1=0$, $\eta(3)=0$

т.е. на найденной допустимой экстремали достигается max

|

Различные обобщения простейшей вариационной задачи.

(3)

- Функционалы, содержащие производные второго порядка

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'')\,dx \qquad \begin{matrix} y(a)=y_1 & y'(a)=y_1' \\ y(b)=y_2 & y'(b)=y_2' \end{matrix}$$

Рассуждаем аналогично: пусть на $y(x)$ достигается экстремум ф-ционала. Тогда

$$\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta) = \int_a^b F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', y''+\alpha\eta'')\,dx$$

здесь $\eta(x)$ - допустимая вариация, очевидно удовлетворяет следующим условиям: $\eta(x) \in C_1[a,b]$, $\eta(a)=\eta(b)=0$, $\eta'(a)=\eta'(b)=0$

$$\Phi'_\alpha\Big|_{\alpha=0} = 0, \qquad \Phi'_\alpha = \int_a^b (F'_y\cdot\eta + F'_{y'}\cdot\eta' + F'_{y''}\cdot\eta'')\,dx =$$

второе слагаемое берем по частям, третье - берем по частям дважды

$$= \int_a^b \eta\left(F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F'_{y''})\right)dx + \underbrace{\eta F'_{y'}\Big|_a^b}_{\eta(a)=\eta(b)=0} + \underbrace{\eta' F'_{y''}\Big|_a^b}_{\eta'(a)=\eta'(b)=0} - \underbrace{\eta \frac{d}{dx}(F'_{y''})\Big|_a^b}_{\eta(a)=\eta(b)=0}$$

Таким образом, необходимое условие для произвольного порядка обобщается так

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k d^k}{dx^k}\left(F'_{y^{(k)}}\right) = 0$$

Для 2-го порядка (как в рассматриваемом случае):

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F'_{y''}) = 0$$

Пример: (§20.3, N5) (4)

$$J(y) = \int_0^1 \left(y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2\right) dx, \qquad \begin{array}{l} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(1) = 2\operatorname{sh} e, \quad y'(1) = 2e \end{array}$$

$$F'_y = 2y, \quad F'_{y'} = 4y', \quad F'_{y''} = 2y''$$

$$2y - 4y'' + 2y^{IV} = 0$$
$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{x} + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$$
$$y'(x) = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{x} + (-C_3 + C_4 - C_4 x)e^{-x}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 = 0 \\ y'(0) = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0 \\ y(1) = (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4)e^{-1} = 2\operatorname{sh} e \\ y'(1) = (C_1 + 2C_2)e - C_3 e^{-1} = 2e \end{cases}$$

$C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 0 \Rightarrow C_4 = -1$

проверим $C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ C_2 = 1,\ C_4 = -1$ верно

$\overset{?}{\Rightarrow} C_3 = 0$

$C_1 + 2C_2 = 2$

$\Downarrow$

$C_2 = 1$

подберем решение системы, предположив, что $C_3 = 0$

такое решение есть. Проверим, что других нет.

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ e & e & e^{-1} & e^{-1} \\ e & 2e & -e^{-1} & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2\operatorname{sh} e \\ 2e \end{matrix} \right\|$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ e & e & e^{-1} & e^{-1} \\ e & 2e & -e^{-1} & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{III-I \\ \text{столбцы}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ e & e & e^{-1}-e & e^{-1} \\ e & 2e & -e^{-1}-e & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{II-e^{-1}I \\ \text{строки}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ e-e^{-1} & 3e^{-1}-e & 0 \\ 2e & -e^{-1}-e & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

т.е. реш. СЛУ единственно

допустимая экстремаль $y_0(x) = 2x \cdot \operatorname{sh} x$

Распишем ΔJ:

$$\Delta J = J(y+\eta) - J(y) = \int_0^1 \left(2y\eta + \eta^2 + \underline{4y'\eta'} + 2\eta'^2 + \underline{2y''\eta''} + \eta''^2\right) dx \ \textcircled{=}$$

$$\int_0^1 4y'\eta'\,dx + \int_0^1 2y''\eta''\,dx = \int_0^1 \eta(\underbrace{-4y'' + 2y^{IV}}_{-2y})\,dx + \underbrace{4y'\eta\Big|_0^1}_{0} + \underbrace{2y''\eta'\Big|_0^1}_{0} - \underbrace{2y'''\eta\Big|_0^1}_{0}$$

$$\textcircled{=} \int_0^1 \left(\cancel{2y\eta} + \eta^2 + 2\eta'^2 + \eta''^2 - \cancel{2y\eta}\right) dx > 0$$

На $y_0(x)$ достигается min

- Функционалы, зависящие от 2-х функций (5)

$$J(y_1,y_2)=\int_a^b F(x,y_1,y_2,y_1',y_2')\,dx \qquad \begin{matrix} y_1(a)=y_{11} & y_2(a)=y_{21} \\ y_1(b)=y_{12} & y_2(b)=y_{22}\end{matrix}$$

Пусть на $y_1(x), y_2(x)$ достигается экстремум ф-ционала. Тогда

$$\Phi(\alpha,\beta)=J(y_1+\alpha\eta_1,\ y_2+\beta\eta_2)$$

$$\begin{cases}\Phi'_\alpha\big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}=0\\ \Phi'_\beta\big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}=0\end{cases}$$

Рассуждая аналогично предыдущим пунктам, приходим к следующему необходимому условию.

$$\begin{cases}F'_{y_1}-\frac{d}{dx}(F'_{y_1'})=0\\ F'_{y_2}-\frac{d}{dx}(F'_{y_2'})=0\end{cases}$$

Пример: (§20.2, N11)

$$J(y_1,y_2)=\int_0^{\pi/2}[2y_1y_2-2y_1^2+(y_1')^2-(y_2')^2]dx \qquad \begin{matrix} y_1(0)=y_2(0)=0 \\ y_1(\frac{\pi}{2})=1,\ y_2(\frac{\pi}{2})=-1\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}F'_{y_1}=2y_2-4y_1, & F'_{y_1'}=2y_1'\\ F'_{y_2}=2y_1, & F'_{y_2'}=-2y_2'\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases}2y_1''+4y_1-2y_2=0\\ 2y_2''+2y_1=0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda^2+2 & -1\\ 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^4+2\lambda^2+1=0, \quad \lambda=\pm i$$

$$y_2(x)=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$$

$$y_1(x)=-y_2''(x)=(C_1-2C_4+C_2x)\cos x+(C_3+2C_2+C_4x)\sin x \quad (\text{ф-ла Лейбница})$$

$$\begin{matrix} y_2(0)=C_1=0 & y_2(\frac{\pi}{2})=C_3=-1 \\ y_1(0)=\underset{0}{C_1}-2C_4=0 & y_1(\frac{\pi}{2})=-1+2C_2=1, \quad C_2=1\end{matrix}$$

пара допустимых экстремалей: $y_1(x)=x\cos x+\sin x$, $y_2(x)=x\cos x-\sin x$

$$\Delta J=J(y_1+\eta_1, y_2+\eta_2)-J(y_1,y_2)=\int_0^{\pi/2}(2\eta_1\eta_2-2\eta_1^2+(\eta_1')^2-(\eta_2')^2)dx$$

получите этот результат самостоятельно в качестве упражнения

Докажем, что на экстремалях экстремум не достигается:

пусть $\eta_1=0 \Rightarrow \Delta J=\int_0^{\pi/2}(-(\eta_2')^2)dx<0$

пусть $\eta_2=0,\ \eta_1=\sin 2x \Rightarrow \Delta J\int_0^{\pi/2}(-2\sin^2 2x+4\cos^2 2x)dx=\pi>0$

– Изопериметрическая задача.

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx, \qquad K(y)=\int_a^b G(x,y,y')\,dx=C_0$$

$$y(a)=y_1$$
$$y(b)=y_2$$

Пусть $y(x)$ – решение изопериметрической задачи

$$\Phi(\alpha)=J(y+\alpha\eta)$$
$$X(\alpha)=K(y+\alpha\eta)=C_0$$

Тогда при $\alpha=0$ достигается условный экстремум ф-ции $\Phi(\alpha)$ при ограничении типа равенства $X(\alpha)=C_0$

Необходимое условие $L'_\alpha\big|_{\alpha=0}=0$, где $L=\Phi+\lambda X$

Таким образом, составляем вспомогательный ф-ционал

$$L(y)=\int_a^b \underbrace{\left(F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')\right)}_{H(x,y,y')}dx$$

Необходимое условие $H'_y-\frac{d}{dx}(H'_{y'})=0$

Пример:

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2+(2x+1)y+(x^2+y)y'\right)dx, \qquad y(0)=0, \quad y(1)=1$$

$$K(y)=\int_0^1 (x+y)y'\,dx=\frac{3}{2}$$

Для начала отметим, что условие задачи можно упростить

$$K(y)=\int_0^1(xy'+yy')\,dx=\int_0^1 xy'\,dx+\underbrace{\frac{y^2}{2}\Big|_0^1}_{1/2}=\frac{3}{2}$$

с другой стороны, $\int_0^1 xy'\,dx=xy\Big|_0^1-\int_0^1 y\,dx=1 \Rightarrow \int_0^1 y\,dx=0$ (*)

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2+\underline{(2x+1)y}+\underline{(x^2+y)y'}\right)dx=\int_0^1\left(y'^2+y+\frac{d}{dx}\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^1 y'^2\,dx+\underbrace{\int_0^1 y\,dx}_{0 \text{ в силу } (*)}+\underbrace{\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1}_{3/2}$$

(7)

Таким образом, упрощенная задача, эквивалентная исходной, имеет вид:

$$\tilde{J}(y) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{matrix}, \quad \int_0^1 y\,dx = 0$$

$$L(y) = \int_0^1 \underbrace{(y'^2 + \lambda y)}_{H(x,y,y')} dx \qquad \left.\begin{matrix} H'_y = \lambda \\ H'_{y'} = 2y' \end{matrix}\right| \Rightarrow 2y'' = \lambda$$

$$y = \frac{\lambda x^2}{4} + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = C_2 = 0$$

$$y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 = 1, \quad C_1 = 1 - \frac{\lambda}{4}$$

Ещё одно уравнение на константы можно получить из „условия связи":

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda x^2}{4} + C_1 x\right) dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda x^3}{12} + \frac{C_1 x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0$$

$$\frac{\lambda}{12} - \frac{\lambda}{8} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 12, \quad C_1 = -2$$

допустимая экстремаль изопериметрической задачи:

$$y(x) = 3x^2 - 2x$$

Для всех $y(x)$, удовлетворяющих условиям задачи $L(y) = J(y) + \lambda C_0$, поэтому, $\Delta L = \Delta J$

$$\int_0^1 2\eta' y' dx = \underbrace{2\eta y'\Big|_0^1}_{0,\ \eta(0)=\eta(1)=0} - \int_0^1 \eta(2y'')dx, \quad 2y'' = \lambda \text{ в силу ур-я Эйлера}$$

$$\Delta L = \int_0^1 (2\eta' y' + \eta'^2 + \lambda\eta) dx = \int_0^1 (\eta'^2 + \cancel{\lambda\eta} - \cancel{\lambda\eta}) dx > 0$$

на $y(x)$ достигается условный min