Классификация положений равновесия автономной системы 2

Умнов Е.А.

14 апреля 2020 г.

Положение равновесия нелинейных автономных систем.

(1)

Пример 1: §13 N2

Найти и исследовать положения равновесия системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y) \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x-4y} + x - 2 \end{cases}$$

Сначала найдём положение равновесия (точки, в которых $\dot{x}=0$ и $\dot{y}=0$ одновременно):

$$\begin{cases} \ln(1-y)=0 \\ \sqrt[3]{x-4y}+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt[3]{x}+x-2=0 \end{cases} \quad // \; x=1 \text{ подходит}$$

$$\begin{array}{l|l} x+x^{1/3}-2 & x^{1/3}-1 \\ \hline x-x^{2/3} & x^{2/3}+x^{1/3}+2=0 \\ x^{2/3}+x^{1/3} & D=1-8<0 \\ x^{2/3}-x^{1/3} & \\ 2x^{1/3}-2 & \\ 2x^{1/3}-2 & \\ 0 & \end{array}$$

Единственное положение равновесия данной системы $(1, 0)$. В достаточно малой окрестности данной точки систему можно рассматривать как линейную, а это значит, что фазовый портрет в этой самой окрестности будет примерно соответствовать одному из ранее рассмотренных шаблонов.

Поэтому следующим шагом линеаризуем систему в окрестности точки $(1,0)$

$$u = x-1 \qquad v = y$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1-v) = -v + o(v) \\ \dot{v} = \sqrt[3]{1+u-4v} + u - 1 = 1 + \frac{u}{3} - \frac{4}{3}v + u - 1 + o(\sqrt{u^2+v^2}) \end{cases}$$

// оставляем только члены 0 и 1-го порядка, причём если положение равновесия было найдено правильно, "члены нулевого порядка и должны уйти".

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -v \\ \dot{v} = \frac{4}{3}u - \frac{4}{3}v \end{cases}, \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{4}{3} = 0$$

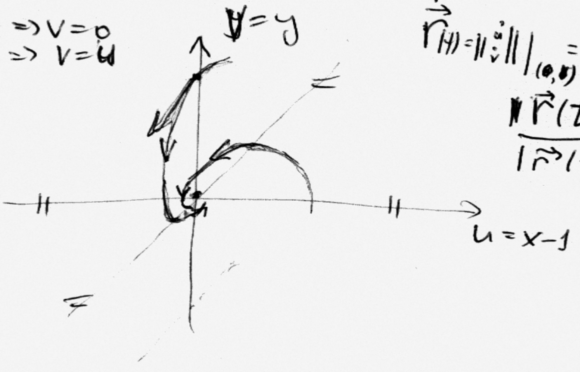
$$D = \frac{16}{9} - \frac{16}{3} = -\frac{32}{9}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

$\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ устойчивый фокус

$\dot{u}=0 \Rightarrow v=0$

$\dot{v}=0 \Rightarrow v=u$



$$\vec{r}(t) = \left\| \begin{matrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{matrix} \right\|_{(0,1)} = \left\| \begin{matrix} -1 \\ -\frac{4}{3} \end{matrix} \right\| \; (*)$$

$$\frac{|\vec{r}(t+T/2)|}{|\vec{r}(t)|} = e^{-\frac{2}{3}\frac{\pi}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}} = e^{-\frac{2^{1/4}}{3^{1/2}}\pi} \approx e^{-\sqrt{6}} \approx 0.1$$

(полагаем $\pi \approx 3$, $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$ такой точности для схематичного построения вполне хватит)

с учетом (*) фокус "скручивается" против часовой стрелки

Замечание: на самом деле технически нет необходимости выполнять линеаризацию по Тейлору, поскольку коэффициенты при линейных членах разложения можно найти непосредственно (т.к. известно, что это соответствующие первые частные производные в точке положения равновесия).

Действительно, пусть дана автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x,y) \\ \dot{y} = h(x,y) \end{cases}$$

и пусть точка (x_0, y_0) – её положение равновесия.

Тогда матрица линеаризованной системы в окрестности т. (x_0, y_0)

$$\begin{Vmatrix} g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \\ h'_x(x_0,y_0) & h'_y(x_0,y_0) \end{Vmatrix} = J(x_0, y_0) \quad \text{(матрица Якоби системы)}$$

В качестве упражнения, проверьте, что систему из Примера 1 можно было найти подобным образом.

Если положений равновесия несколько, то линеаризацию по Тейлору для каждого из них надо делать отдельно, тогда как общий вид матрицы Якоби общий для всех.

Пример 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = x+y+1 \\ \dot{y} = y + \sqrt{1+2x^2} \end{cases}$$

найдём положения равновесия системы:

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ y+\sqrt{1+2x^2}=0 \end{cases} \qquad y=-1-x$$

$$x+1=\sqrt{1+2x^2}, \quad x^2-2x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=-1 \\ x=2,\ y=-3 \end{array}\right.$$

Выпишем линеаризованные системы:

$$J(x,y) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} & 1 \end{Vmatrix}$$

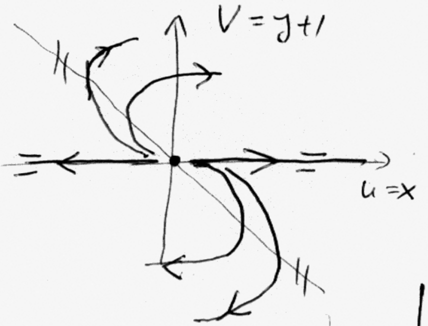
а) $(0,-1)$, $J(0,-1) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, при этом $J(0,-1)$ не диагональна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вырожденный узел, $\vec{S} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$

$\dot{u}=0 \Rightarrow V=-u$

$\dot{V}=0 \Rightarrow V=0$



б) $(2,-3)$ $\quad J(2,-3) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{Vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \frac{4}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - \frac{1}{3} = 0$$

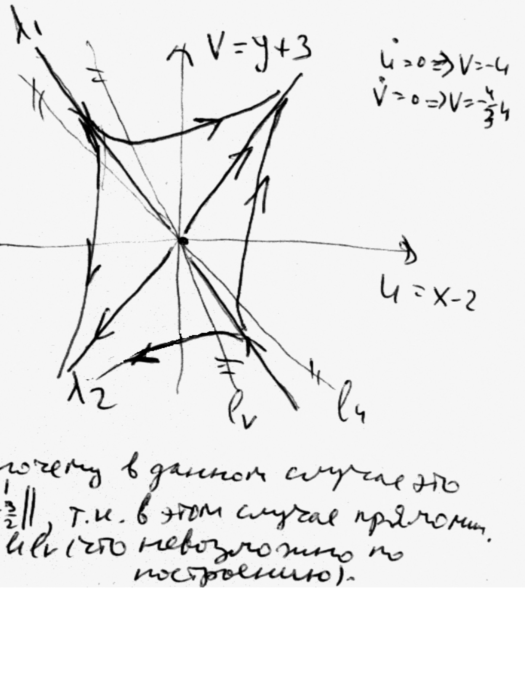
$$D = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

действительные λ разных знаков $\Rightarrow$ седло

$\lambda_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} \vec{S}_1 = \vec{0}$, $\quad \vec{S}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$

$\lambda_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \begin{Vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} \vec{S}_2 = \vec{0}$, $\quad \vec{S}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$



$\dot{u}=0 \Rightarrow V=-u$

$\dot{V}=0 \Rightarrow V=-\frac{4}{3}u$

Поскольку при схематичных построениях большая точность рисунка не соблюдается, округления можно брать „очень приближённые". При этом, однако, нужно следить, чтобы подобное округление не приводило к качественным ошибкам.

Действительно, оценка $\vec{S}_1 \approx \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$ плоха, так как в этом случае прямолин. фаз. траектория совпадет с l_u (подумайте самостоятельно, почему в данном случае это невозможно). Так же не годится оценка $\vec{S}_1 \approx \begin{Vmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{Vmatrix}$, т.к. в этом случае прямолин. фазовая траектория пройдет „выше" как l_u, так и l_v (что невозможно по построению).

При этом для второго собственного вектора годятся обе оценки $\vec{S}_2 \approx \begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}$ или $\vec{S}_2 \approx \begin{Vmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{Vmatrix}$, так как эти округления не приводят ни к каким конфликтам. Но, поскольку по построению очевидно, что $l(\vec{S}_1)$ и $l(\vec{S}_2)$ симметричны относительно оси ординат, эту симметрию лучше не нарушать. А в качестве $l(\vec{S}_1)$ можно взять биссектрису острого угла (l_u, l_v) – такое построение будет вполне удовлетворительным.