Первые интегралы и решение автономных систем

Умнов Е.А.

22 апреля 2020 г.

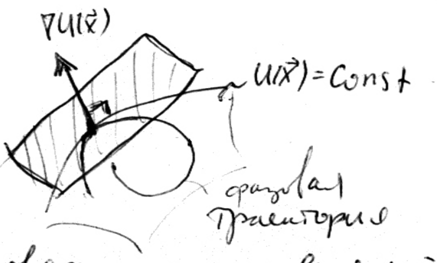
Первые интегралы. Нахождение решений автономных систем.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}) \qquad (*)$$

Скалярная функция $u(\vec{x})$ называется **первым интегралом (ПИ)** автономной системы $(*)$ в области $M \subseteq R^n$, если

$$(\nabla u(\vec{x}), \vec{F}(\vec{x})) \equiv 0 , \quad \forall \vec{x} \in M \qquad (**)$$

- очевидно, что если $u(\vec{x})$ стационарна (т.е. $u(\vec{x}) = const$), то определение ПИ выполняется тривиально. Такие ПИ будем называть стационарными и, очевидно, что они никакого интереса не представляют.
- Сформулированное определение ПИ рассматривает их локально, и в этом тот смысл, что существование нестационарного ПИ для одной и той же автономной системы может зависеть от выбора M.



- Геометрический смысл нестационарного ПИ иллюстрируется данным рисунком. Градиент скалярной гладкой ф-ции в каждой точке области определения ортогонален касательной гиперплоскости к поверхности уровня $u(\vec{x})$, проходящей через данную точку (исключение составляют стационарные точки $u(\vec{x})$, в которых, как известно $\nabla u = \vec{o}$).

С другой стороны, $\vec{F}(\vec{x})$ – касательный вектор к фазовой траектории, проходящей через точку $\vec{x}$ в этой самой точке $\vec{x}$.

Таким образом, геометрически это означает, что все фазовые траектории лежат в поверхностях уровня ПИ, а аналитически это можно описать следующим образом:

пусть $\vec{\varphi}(t)$ – решение $(*)$, тогда $u(\varphi(t)) = const$.

Найденный нестационарный ПИ устанавливает связь между искомыми ф-циями $x_i(t)$, что может быть использовано для решения системы $(*)$.

- У автономной системы нестационарных ПИ может и не быть.

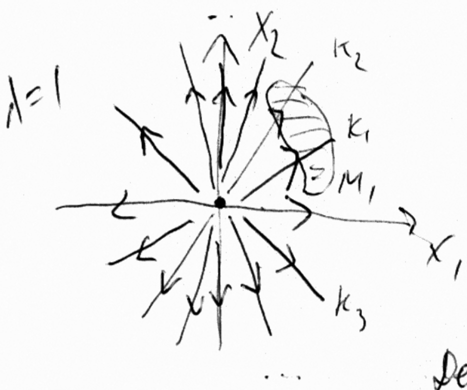
Н-р: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$ | Эта система легко решается:

$x_1 = c_1 e^t$, $x_2 = c_2 e^t$ $\Rightarrow$ $\frac{x_1}{x_2} = const$ и $x_2 = 0$

т.е. $U(\vec{x}) = \frac{x_1}{x_2}$, $x_2 \neq 0$

$U(\vec{x}) = \frac{x_2}{x_1}$, $x_1 \neq 0$

С другой стороны, положение равновесия рассматриваемой системы - это дикритический узел, фазовые траектории которого - всевозможные лучи, отложенные от (0, 0) и сама точка (0, 0).



Тогда каждый луч принадлежит множеству уровня ф-ции $\varphi = \frac{x_2}{x_1}$

Если ф-ция U рассматривается на всей плоскости (x_1, x_2), то она может быть только стационарной.

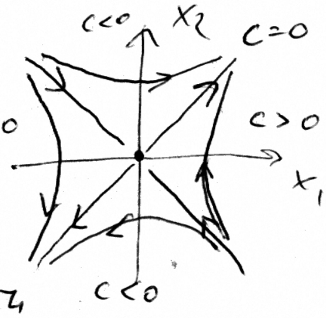
Действительно, U гладкая на всем M, а, значит, и непрерывна. Все лучи имеют в качестве предельной точку (0,0) и в силу непрерывности U предел по любому направлению в (0,0) один и тот же. Но каждый луч в отдельности есть (под)множество уровня $U(\vec{x})$ $\Rightarrow$ все лучи принадлежат одному и тому же мн-ву уровня $\Rightarrow$ $U(\vec{x})$ стационарна.

- Так же отметим, что если рассмотреть ту же систему на некоторой области M_1 $(\vec{0} \notin \overline{M_1})$, то $U(\vec{x}) = \frac{x_2}{x_1}$ будет нестационарным ПИ, а значение $U(\vec{x})$ на лучах будет соответствовать углу наклона оного.

Пример 2: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ || положение равновесия данной системы седло ($\lambda = \pm 1$)

Если из решения данной системы исключить t, то получится выражение $x_1^2 - x_2^2 = C$

Из аналитической геометрии известно, что это ур-е описывает гиперболу при $c \neq 0$, и пару пересекающихся прямых при $c = 0$.



$u(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$ является нестационарным ПИ на всей плоскости.

Отличие от предыдущего примера в том, что общие предельные точки фазовых траекторий находятся на бесконечности, и если рассматриваемая плоскость не является расширенной (т.е. у нее существует точка „бесконечность"), данное обстоятельство не существенно в контексте рассматриваемого вопроса.

— Если у автономной системы существует хотя бы один нестационарный ПИ, то у нее нестационарных ПИ бесконечно много.

Действительно, если $u(\vec{x})$ - ПИ (*), то $H(u(\vec{x}))$ ($H(s)$ - непр. дифф.) - тоже ПИ. проверяется непосредственно:

$$\left(\nabla H(u(\vec{x})), \vec{F}\right) = H'_u \underbrace{(\nabla u(\vec{x}), \vec{F})}_{0} = 0$$

Вместе с тем очевидно, что множества уровня $u(\vec{x})$ будут множествами уровня и для $H(u(\vec{x}))$ и в этом смысле $H(u(\vec{x}))$ новой информации по сравнению с $u(\vec{x})$ не несет.

Ввиду этого рассматривают понятие (функционально) независимых ПИ.

В качестве критерия можно использовать следующее утверждение:

ПИ независимы на M, если их градиенты на M линейно независимы.

– В общем случае отсутствие нестационарных ПИ может обуславливаться слишком сложным поведением фазовых траекторий, не „укладывающихся" на поверхности уровня никакой функции.

Но эту проблему можно преодолеть, если рассматривать ПИ локально, о чём и говорит следующая теорема.

Th: пусть M - область в R^n, а $\vec{x}_0$ - неособая точка системы (*) ($\vec{x}_0 \in M$). Тогда существует такая окрестность $\vec{x}_0$, что в ней система (*) имеет n-1 независимые ПИ, а любой ПИ системы (*) есть функция от них.

Пример 3 §16 N16
решить систему: $\begin{cases} \dot{x} = x(2y+z) \\ \dot{y} = xe^z + y \\ \dot{z} = -(2y+z) \end{cases}$, $x>0$

Найдем ПИ, исключив из системы dt:

$$dt = \frac{dx}{x(2y+z)} = \frac{dy}{xe^z+y} = \frac{dz}{-(2y+z)} \quad (3)$$

Из полученной системы равенств выберем то, в котором можно избавиться от третьей переменной (которой нет под дифф)

$$\frac{dx}{x(2y+z)} = \frac{dz}{-(2y+z)} \qquad \frac{dx}{x} = -dz, \quad e^z = \frac{C}{x} \Rightarrow \boxed{u_1 = xe^z} \text{ - ПИ}$$

Чтобы найти ПИ, независимый к уже найденному, нужно использовать часть равенства (3) не использованную ранее.

$$\frac{dy}{xe^z+y} = \frac{dz}{-(2y+z)}$$

| в данном выражении присутствуют все три переменные, но можно воспользоваться тем, что ПИ стационарен на решении системы.

$$\frac{dy}{u_1+y} = \frac{dz}{-(2y+z)}$$

| т.е. здесь u_1 считаем просто константой

$$2y\,dy + z\,dy = -u_1\,dz - y\,dz$$

$$2y\,dy + z\,dy + y\,dz + u_1\,dz = 0$$

$$u_2 = y^2 + yz + u_1 z = y^2 + yz + xze^z \text{ – второй ПИ.}$$

согласно теории, других независимых ПИ у системы нет.

Следующим шагом нужно найти одну из ф-ций, состав. систему.

$$\dot{y} = u_1 + y, \quad \frac{dy}{u_1+y} = dt, \quad y(t) = ce^t - u_1$$

Можно подставить найденную ф-цию в другие ур-я и решить их, но в этом случае возникнет избыток констант (надо будет избавиться от u_1). Гораздо проще использовать найденные ранее ПИ для нахождения остальных ф-ций.

$$u_2 = y^2 + yz + u_1 z \Rightarrow z(\underbrace{u_1+y}_{ce^t}) = u_2 - y^2 = u_2 - (ce^t - u_1)^2$$

$$z(t) = \frac{u_2 - (ce^t - u_1)^2}{ce^t}$$

Наконец, $x(t) = u_1 \cdot e^{-z} = u_1 \exp\left(\frac{(ce^t - u_1)^2 - u_2}{ce^t}\right)$

Итого:

$$\begin{cases} x(t) = u_1 \exp\left(\frac{(ce^t-u_1)^2 - u_2}{ce^t}\right) \\ y(t) = ce^t - u_1 \\ z(t) = \frac{u_2 - (ce^t - u_1)^2}{ce^t} \end{cases}$$

| здесь u_1 и u_2 имеют смысл констант интегрирования

Пример 4 §16 №21

$$\begin{cases} \mathrm{I} & \dot{x} = x(x+y) & x>0, \\ \mathrm{II} & \dot{y} = -y(x+y) & y>0 \\ \mathrm{III} & \dot{z} = -z(x-y) & z>0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{-z(x-y)} = \frac{d(x+y)}{x^2-y^2}$$

Данную систему можно решать в том же ключе, что и предыдущий пример, но для упрощения выкладок можно использовать особенности системы.

$$y\cdot\mathrm{I} + x\cdot\mathrm{II} = (\dot{xy}) = xy(x+y) - xy(x+y) = 0 \Rightarrow \underbrace{\boxed{u_1 = xy}}_{\text{ПИ}} > 0$$

Так же можно использовать и такое:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \dot{x} + \dot{y} = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{dz}{-z(x-y)} \Rightarrow$$

$$\frac{d(x+y)}{x+y} + \frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\boxed{u_2 = z(x+y)}}_{\text{ПИ}}$$

Теперь решаем систему:

$$\dot{x} = x^2 + xy = x^2 + u_1$$

$$\frac{dx}{x^2+u_1} = dt, \quad \frac{1}{\sqrt{u_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{u_1}} = t + c \Rightarrow x = \sqrt{u_1}\, \operatorname{tg} \sqrt{u_1}(t+c)$$

$$y = \frac{u_1}{x} = \sqrt{u_1}\, \operatorname{ctg} \sqrt{u_1}(t+c)$$

$$z = \frac{u_2}{x+y} = \frac{u_2}{\sqrt{u_1}\,\underbrace{(\operatorname{tg}(\ldots) + \operatorname{ctg}(\ldots))}_{= \frac{2}{\sin 2(\ldots)}}} = \frac{u_2}{2\sqrt{u_1}} \sin \sqrt{u_1}(t+c)$$

Пример 5: $\begin{cases} \dot{x} = -2x+6y-4z \\ \dot{y} = 9x-5y+6z \\ \dot{z} = 15x-18y+15z \end{cases}$

Хотя нахождение решения линейной системы не представляет особой сложности, иногда задача стоит именно в нахождении ПИ, а не решении сист.

$$(4)\quad \frac{dx}{-2x+6y-4z} = \frac{dy}{9x-5y+6z} = \frac{dz}{15x-18y+15z}$$

В отличие от нелинейных систем, для линейных систем существует алгоритм поиска ПИ. Попытаемся его вывести.

Из св-в пропорций известно, что $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2}{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$

Соответственно, можно попытаться скомбинировать системы равенств (4) так, чтобы выражение под дифференциалом было пропорционально выражению в знаменателе – такая дробь легко интегрируется.

$$\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z) \equiv \alpha(-2x+6y-4z)+\beta(9x-5y+6z)+\gamma(15x-18y+15z)$$

$$(-2\alpha+9\beta+15\gamma-\alpha\lambda)x+(6\alpha-5\beta-18\gamma-\beta\lambda)y+(-4\alpha+6\beta+15\gamma-\gamma\lambda)z\equiv 0$$

Т.к. данное равенство выполняется тождественно (вне зависимости от x, y и z), то коэфф. при x, y, z равны 0 одновременно. Итого, получаем систему относительно неизвестных α, β и γ:

$$\begin{Vmatrix} -2-\lambda & 9 & 15 \\ 6 & -5-\lambda & -18 \\ -4 & 6 & 15-\lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Vmatrix} = \vec{0} \quad (5)$$

Можно заметить, что при $\lambda=0$ матрица данной системы есть транспонированная матрица исходной системы (так что систему (5) можно выписывать сразу без предварительных выкладок).

Система (5) однородна, но $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$ (по задумке), поэтому требуются нетривиальные решения, а это возможно только если основная матрица системы вырождена $\Rightarrow$ λ имеет смысл характеристического числа матрицы.

$$\Delta_1 = -2-5+15 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 15 \\ -4 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{1}{-5} & \overset{-3}{-18} \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = -44+30+33 = 19$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 9 & 15 \\ 6 & -5 & -18 \\ -4 & 6 & 15 \end{vmatrix} \underset{\text{II}}{\overset{\text{I-II}}{=}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & 6 & 15 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ \text{III}+5\text{II} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 11 & 0 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 12$$

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0$$

	1	-8	19
1	1	-7	12

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$$

$$D = 49-48 = 1 \qquad \lambda = \frac{7 \pm 1}{2} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right.$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{Vmatrix} -3 & 9 & 15 \\ 6 & -6 & -18 \\ -4 & 6 & 14 \end{Vmatrix} \bar{S}_1 = \vec{0} \sim \begin{Vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \bar{S}_1 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad \begin{Vmatrix} -5 & 9 & 15 \\ 6 & -8 & -18 \\ -4 & 6 & 12 \end{Vmatrix} \bar{S}_2 = \vec{0} \sim \begin{Vmatrix} -5 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{Vmatrix} \quad \bar{S}_2 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \quad \begin{Vmatrix} -6 & 9 & 15 \\ 6 & -9 & -18 \\ -4 & 6 & 11 \end{Vmatrix} \bar{S}_3 = \vec{0} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \\ -4 & 6 & 11 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \vec{S}_3 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Компоненты „собственных векторов" и есть искомые коэфф. α, β, γ. Используя их, равенство (4) можно продолжить следующим образом:

$$\frac{d(2x-y+z)}{2x-y+z} = \frac{d(3x+z)}{3(3x+z)} = \frac{d(3x+2y)}{4(3x+2y)}$$

Соответственно,

$$u_1 = \frac{2x-y+z}{(3x+z)^3}$$

$$u_2 = \frac{2x-y+z}{(3x+2y)^4}$$

Теперь рассмотрим случай недиагонализируемой матрицы: (9)

Пример 6: Найти один нестационарный ПИ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x+z \\ \dot{y} = -x-2y+3z \\ \dot{z} = -y+z \end{cases}$$

$$\begin{Vmatrix} -2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{Vmatrix} \vec{S} = \vec{0}$$

$$\Delta_1 = -2-2+1 = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4-2+1 = 3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 = (\lambda+1)^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix} \bar{S} = \bar{0}, \quad \bar{S} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\Bigg\|, \quad \vec{p}_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\Bigg\|, \quad \vec{p}_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Теперь скомбинируем уравнения системы с коэффициентами, найденными как из собственного, так и из присоединенного векторов:

$$\frac{d(x-y+z)}{-(x-y+z)} = \frac{d(-x+z)}{2x-z-y+z} = \frac{dx}{-y+z}$$

$$\frac{d(x-y+z)}{-(x-y+z)} = \frac{d(-x+z)}{-(-x+z)+x-y+z} = \frac{dx}{-x+-x+z}$$

сделаем замену переменных

$p = x-y+z$

$q = -x+z$

$r = x$

$$\frac{dp}{-p} = \frac{dq}{-q+p} = \frac{dr}{-r+q}$$

Таким образом, данная схема „подсказывает" замену, ведущую к максимальному упрощению, и в общем случае.

$$-qdp+pdp = -pdq$$

$$\frac{pdq-qdp}{p^2} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$+d\left(\frac{q}{p}\right) + d(\ln p) = 0$$

$$u_1 = pe^{\frac{q}{p}} = (x-y+z)e^{\frac{-x+z}{x-y+z}}$$

Теоретически с помощью третьей дроби можно найти и второй ПИ, но для этого надо решать трансцендентное ур-е (чтобы выразить p через q)