

Линейные уравнения в частных производных 1-го порядка

УМНОВ Е.А.

28 апреля 2020 г.

Линейные однородные уравнения в частных производных 1-го порядка. (1)

$$(x) \quad \sum_{i=1}^n a_i(x) u'_{x_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}(x), \nabla u(x)) = 0$$

Очевидно, что в качестве решений ур-я (x) будут выступать ПИ следующей автономной системы: $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{a}(\vec{x})$

Верно и обратное утверждение - любое решение (x) есть ПИ характеристической системы.

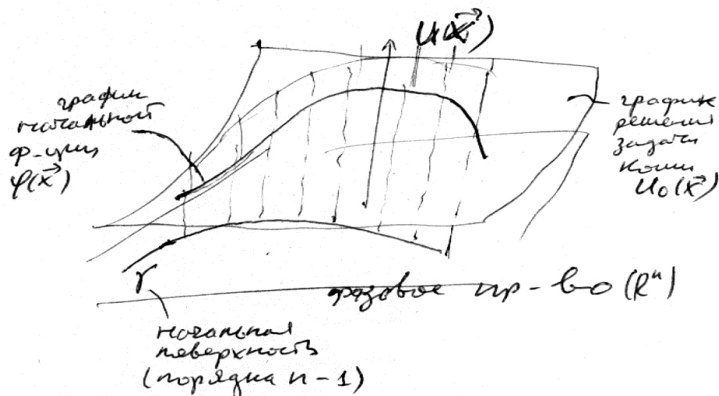
(Эту систему называют характеристической, а её фазовые траектории - характеристиками ур-я (x)).

Таким образом, общее решение ур-я (x) имеет вид:

$$(xx) \quad u(\vec{x}) = F(u_1(x), u_2(x), \dots, u_{n-1}(x)), \quad \text{где } F - \text{непрерыв-дифф. ф-ция, а } u_i(x) (i=1, n-1) - \text{независимые ПИ характеристической системы.}$$

Каждому частному решению соответствует своя ф-ция F в (xx), и постановка задачи Коши заключается в предположении таких условий, которые позволяют эту функцию F однозначно определить.

Очевидно, что $\varphi(\vec{x})$ - скалярная ф-ция, а γ - гладкая поверхность



Тогда касание γ с характеристиками называются характеристическими точками.

В теории доказывается, что если некоторая точка поверхности γ не является характеристической, то $\exists$ её окрестность, в которой решение задачи Коши $u(\vec{x})|_{\vec{x} \in \gamma} = \varphi(\vec{x})$ существует и единственно.

Рассмотрим на простом примере проблему, связанную с поставкой задачи Коши. (2)

Пример: $u'_x - xu'_y = 0$

Общее решение этого уравнения имеет вид (не сложно убедиться)
 $u(x, y) = F(x^2 + y^2)$

Теперь рассмотрим различные задачи Коши для этого ур-я:

а) $u_0(x, y) \Big|_{x^2+y^2=1} = \varphi(x, y) = \text{const}$

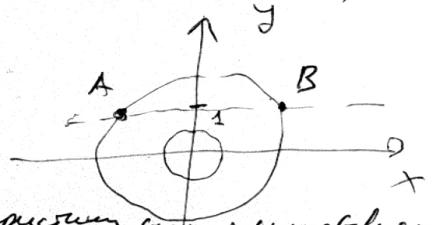
Т.е. в данном случае начальная поверхность целиком в себе содержит одну из характеристик (а фазовый портрет характеристической системы в данном случае - семейство концентрических окружностей). Поскольку, решение ур-я есть ПИ характ. системы, то на характеристике $u_0(x, y)$ стационарна. Поэтому, если $\varphi(x, y)$ нестационарна, то такая задача Коши гарантированно решений не имеет.

Если же $\varphi(x, y) \equiv C_0$, то решений бесконечно много, т.к. $\forall$ решение ур-я на характеристике постоянно, и зная коэффициент (если $F(x)$ реш, то $\alpha F(x) = C_0$, $x \in \gamma$ - тоже решение) можно получить решение $\alpha F(x) = C_0$, $x \in \gamma$.

б) $u_0(x, y) \Big|_{y=1} = x^3$

Такая задача Коши также не имеет решения. Действительно, γ пересекает одну и ту же характеристику (такая существует) в двух разных точках А и В, при этом $\varphi(A) \neq \varphi(B)$

Поскольку для $\forall u(x, y) \rightarrow u(A) = u(B)$, то задача Коши решения не имеет.



в) попробуем "исправить" предыдущий пункт.

$u_0(x, y) \Big|_{y=1, x>0} = x^3$

Вот эту задачу Коши уже удастся решить;

$$\begin{aligned} & \text{И } x^2 + y^2 = C \\ & \text{и } u_0(x, 1) = x^3 \\ & \text{и } y=1, x>0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{Технически для} \\ & \text{нахождения} \\ & \text{решения, нужно} \\ & \text{выразить} \\ & u_0 \text{ через } C \end{aligned}$$

$$x^2 = C - 1 \Rightarrow x^3 = (C - 1)^{3/2}$$

$$u_0(x, 1) = (C - 1)^{3/2} \Rightarrow F_0(C) = (C - 1)^{3/2}$$

$$\text{и } u(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{3/2}$$

Пример 1: § 17 N 68

3

$$(x^3+y^3)u'_x + x^2y u'_y + \frac{y^3\sqrt{1+z^2}}{x} u'_z = 0, \quad \varphi = z + \sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{dx}{x^3+y^3} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{x dz}{y^3\sqrt{1+z^2}}$$

I II III

$$\gamma: x^3 = 3y^3 / 4x$$

$$I = II \Rightarrow x^2y dx - x^3 dy - y^3 dy = 0$$

$$x = y t$$

$$y^3(t^2(y dt + t dy) - t^3 dy - dy) = 0$$

$$y t^2 dt = dy, \quad \frac{t^3}{3} = \ln|y| + \frac{C_1}{3}$$

// это однородное уравнение, сводящееся к уравнению разд. переменными стандартной заменой.

$$u_1 = \frac{x^3}{y^3} - \ln|y^3|$$

$$\frac{x^3}{y^3} = u_1 + \ln|y^3|$$

$$II = III \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x^3}{y^3} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = (u_1 + \ln|y^3|) \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{1}{3} \ln(u_1 + 3 \ln|y|) + \ln u_2 = \ln(z + \sqrt{1+z^2})$$

$$u_2 = \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{(u_1 + \ln|y^3|)^{1/3}} = \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x} (z + \sqrt{1+z^2})$$

$$u = F\left(\frac{x^3}{y^3} - \ln|y^3|, \frac{y}{x} (z + \sqrt{1+z^2})\right) \quad // \text{ согласно теории, группа независимых ПИ не определяется}$$

$$\varphi = z + \sqrt{1+z^2}$$

$$u_1|_\gamma = \ln x^3 - \ln y^3 = 3 \ln \left(\frac{x}{y}\right) = \ln(3 \ln x) \Rightarrow 3 \ln x = e^{u_1}$$

$$u_2|_\gamma = (3 \ln x)^{1/3} (z + \sqrt{1+z^2}) \Rightarrow \varphi = \frac{u_2 \cdot (3 \ln x)^{1/3}}{1} = u_2 e^{u_1/3}$$

$$u_0(x, y, z) = \frac{z + \sqrt{1+z^2}}{x} e^{\frac{x^3}{3y^2}}$$

Пример 2: §17 W100

4

$$(x+y-z)^2 + y - z - 2)u'_x + (z+1)u'_y + (y-1)u'_z = 0, \quad \varphi = \frac{1}{x+y+1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+y-z)^2 + y - z - 2 \\ \dot{y} = z+1 \\ \dot{z} = y-1 \end{cases} \quad y: z = -1, y > 1$$

На всяком случае "проверим" предположенную конструкцию в 1-м гр-нте (даже это неясно)

$$\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = (x+y-z)^2 + y - z - 2 + z + 1 - y + 1 = (x+y-z)^2 \quad (\text{угадали!})$$

Тогда мы легко замечаем $\dot{y} + \dot{z} = y + z$

$$\frac{d(x+y-z)}{(x+y-z)^2} = \frac{dy}{z+1} = \frac{dz}{y-1} = \frac{d(y+z)}{y+z}$$

I II III IV

$$I = IV \Rightarrow -(x+y-z)^{-1} = -u_1 + \ln|y+z|$$

$$u_1 = \ln|y+z| + \frac{1}{x+y-z}$$

$$II = III \Rightarrow \frac{dy}{z+1} = \frac{dz}{y-1} \Rightarrow (y-1)dy = (z+1)dz$$

$$\frac{y^2}{2} - y = \frac{z^2}{2} + z + u_2$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(y^2 - z^2) - y - z =$$

$$= (y+z)\left(\frac{y-z}{2} - 1\right)$$

$$u = F\left(\ln|y+z| + \frac{1}{x+y-z}, (y+z)\left(\frac{y-z}{2} - 1\right)\right)$$

$$\varphi = \frac{1}{x+y+1}$$

$$u_1|_y = \ln(y-1) + \frac{1}{x+y+1} \Rightarrow \varphi = u_1 - \ln(y-1) = u_1 - \frac{1}{2}u_2$$

$$u_2|_y = (y-1)\left(\frac{y-1}{2} - 1\right) = \frac{(y-1)^2}{2} \Rightarrow y-1 = \sqrt{2u_2}$$

$$u_0 = \ln|y+z| + \frac{1}{x+y-z} - \frac{1}{2}\ln(y+z)\left(\frac{y-z}{2} - 1\right)$$

Сложность решения задачи Коши может зависеть от найденных независимых ПИ. (5)

Пример 3: ДУ ЭКЗ 2001/02

$$x(y^2 - z^2)u'_x + y(x^2 + z^2)u'_y + z(x^2 + y^2)u'_z = 0, \quad \varphi = x^2(1+z^2)$$

$$y = xz, \quad x > 0, \quad y > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - z^2) \\ \dot{y} = -y(x^2 + z^2) \\ \dot{z} = z(x^2 + y^2) \end{cases}$$

одни ПИ подбираются относительно
первого:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x^2y^2 - x^2z^2 - x^2y^2 - y^2z^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 0$$

$$\text{т.е. } u_1 = x^2 + y^2 + z^2$$

Далее „естественный шаг рассуждений“

$$\text{II} = \text{III} \quad \frac{dy}{-y(u_1 - y^2)} = \frac{dz}{z(u_1 - z^2)}$$

$$\frac{dz}{z(u_1 - z^2)} = \frac{1}{2} \frac{dz^2}{z^2(u_1 - z^2)} = \frac{1}{2u_1} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{u_1 - z^2} \right) dz^2 = \frac{1}{2u_1} \ln \frac{z^2}{u_1 - z^2}$$

$$\text{интегрируем где } y \Rightarrow \ln \tilde{u}_2 = \ln \frac{z^2}{u_1 - z^2} + \ln \frac{y^2}{u_1 - y^2}$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{y^2 z^2}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}$$

Решить задачу Коши для пары ПИ $u_1, \tilde{u}_2$ поправим
самостоятельно.

Но при более внимательном рассмотрении системы
можно увидеть и другую симметрию:

$$-\frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{z}}{z} = -\frac{y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{y^2}{x}$$

$$u = F(x^2 + y^2 + z^2, \frac{yz}{x})$$

$$\varphi = x^2(1+z^2)$$

$$u_1|_\varphi = x^2 + x^2 z^2 + z^2 = z^2 + x^2(1+z^2) = z^2 + \varphi$$

$$u_2|_\varphi = z^2$$

$$\Rightarrow \varphi = u_1 - u_2$$

$$u_0 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{yz}{x}$$