

Задачи к теме "Собственные интегралы, зависящие от параметров"

Умнов Е.А. 20 марта 2020 года.

Собственные интегралы, зависящие от параметра. (1)

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$$

Если $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $K = \{(x, \alpha) : a \leq x \leq b, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$ то $I(\alpha)$ непрерывная ф-ция на $[\alpha_1, \alpha_2]$

Если при том $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, то $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b f(x, \alpha) dx = \int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx$

Пример 1:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^4 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx \equiv$$

Данный интеграл по x "не берется", но в силу непрерывности поинтегральной ф-ции (или ф-ции 2-х переменных) предел можно внести под знак интеграла

$$\equiv \int_1^4 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2$$

Замечание к рассмотренному "контрпримеру к Т-1".

При рассмотрении данного контрпримера была допущена техническая ошибка при верном общем рассуждении:

$$\int_0^1 \frac{df(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\frac{x^2}{2} + 1} \frac{dx}{2} \stackrel{t = \frac{x}{2}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(2t)}{t^2 + 1} dt \geq f(x_0) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2 + 1} \geq$$

$$\geq f(x_0) \arctan t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot f(x_0) > 0$$

Пример 2: (§13 №2(1))

Вычислить интеграл, считая, что $a > 0, b > 0$:

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \equiv$$

Без ограничений общности будем считать, что $b > a$

Тогда $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^\alpha d\alpha$ и $\equiv - \int_0^1 dx \int_a^b \underbrace{\sin(\ln x) \cdot x^\alpha}_{f(x, \alpha)} d\alpha$

доопределим $f(x, \alpha)$ в точках $(0, \alpha)$ нулем. Тогда $f(x, \alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [a, b]$ (т.к. синус ограничена ф-ция, а $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 \forall \alpha > a > 0$).

Поэтому $\Leftrightarrow - \int_a^b d\alpha \int_0^1 \sin(\alpha x) \cdot x^\alpha dx \stackrel{x=e^t}{dx=e^t dt} = - \int_a^b d\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+1)t} \cdot \sin t dt}_I \Leftrightarrow$ (2)

т.е. $I = - \underbrace{e^{(\alpha+1)t} \cdot \cos t}_{1-0} \Big|_{-\infty}^0 + (\alpha+1) \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+1)t} \cdot \sin t dt = -1 + (\alpha+1) \left(\underbrace{e^{(\alpha+1)t} \cdot \sin t}_{0-0} \Big|_{-\infty}^0 - \underbrace{(\alpha+1) \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+1)t} \cdot \sin t dt}_I \right)$

$$I = -1 - (\alpha+1)^2 I, \Rightarrow I = -\frac{1}{(\alpha+1)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{d\alpha}{(\alpha+1)^2 + 1} = \arctg(b+1) - \arctg(a+1)$$

Дифференцирование по параметру - прием, полезный при вычислении многих интегралов.

Пример 3: (§13 N17)

Способом дифференцирования по параметру α интеграла $I_1 = \int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$, где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $I_2 = \int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}$

решим $f(x, \alpha) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ и $f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{-2\alpha}{(x^2 + \alpha^2)^2}$ непрерывны на $[0, b] \times [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha_1 > 0$.

$$\text{Тогда } I_2 = -\frac{1}{2\alpha} I_1'$$

$$I_1 = \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{x}{\alpha} \Big|_0^b = \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{b}{\alpha}$$

$$(I_1)'_\alpha = -\frac{1}{\alpha^2} \arctg \frac{b}{\alpha} - \frac{b}{\alpha^3} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}}$$

$$\text{Учтем, } I_2 = -\frac{1}{2\alpha} \left(\alpha \arctg \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \right)$$

Пример 4.

(3)

Возьмем интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$ (*), $a \geq a_0 > 0$, $b \geq b_0 > 0$

Очевидно, подынтегральное выражение непрерывно при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ и любых действительных значениях параметров.

$$f'_a(x, a, b) = \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

Так же непрерывна, поэтому можно использовать дифференцирование по параметру.

$$I'_a(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{2a}{a^2 + b^2 + t^2} \frac{(-dt)}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2a dt}{(a^2 + b^2 + t^2)(1+t^2)} \quad (**)$$

$$\frac{A}{a^2 + b^2 + t^2} + \frac{B}{1+t^2} = \frac{A + a^2 B + t^2(A + b^2 B)}{(a^2 + b^2 + t^2)(1+t^2)} \quad \Rightarrow \begin{cases} A + a^2 B = 1 \\ A + b^2 B = 0 \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{a^2 - b^2}$$

$$A = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{2b}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \frac{d(\frac{b}{a}t)}{1 + \frac{b^2}{a^2}t^2} = \frac{2}{a^2 - b^2} (a \arctan t \Big|_0^{+\infty} - b \arctan \frac{b}{a}t \Big|_0^{+\infty}) = \\ & = \frac{\pi(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{\pi}{a+b} \end{aligned}$$

$$\text{Соответственно, } I(a, b) = \int \frac{\pi}{a+b} da = \pi \ln(a+b) + C(b) \quad (***)$$

Для того, чтобы определить слагаемое $C(b)$, возникшее после интегрирования по a , подставим значения параметров, при которых значение $I(a, b)$ очевидно.

$$\text{Так, если } a=b, \text{ то в силу (*) } I(a, b) = \pi \ln b$$

$$a \text{ в силу (***) } I(a, b) = \pi \ln 2b + C(b)$$

$$\text{т.е. } \pi \ln b = \pi \ln 2b + C(b), \quad C(b) = -\ln 2$$

$$I(a, b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$$

Заметим, что интеграл (*) не зависит от знаков a и b и величин a_0 и b_0 , поэтому полученный результат можно обобщить

$$I(a, b) = \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}, \quad a^2 + b^2 > 0$$

В заключение пример, который показывает, что условия Th1 не являются необходимыми.

(4)

Пример 5 (§13 №3)

Доказать, что функция $I(x) = \int_0^1 \underbrace{\text{sign}(x-t)}_{f(t,x)} dt$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим 3 случая:

1) $x < 0$, тогда $f(t,x) = 1 \Rightarrow I(x) = 1$

2) $x > 1$, тогда $f(t,x) = -1 \Rightarrow I(x) = -1$

3) $x \in (0,1) \Rightarrow I(x) = -\int_0^x dt + \int_x^1 dt = -x + 1 - x = 1 - 2x$

Итого
$$I(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - 2x, & x \in (0,1) \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

Это непрерывная ф-ция с.т.х, а, значит, предел $x \rightarrow x_0$ можно записать по значению интеграла, хотя подинтегральная ф-ция не является непрерывной.