Задачи к теме "Несобственные интегралы, зависящие от параметров 01"

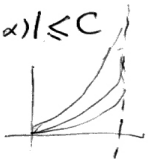
Умнов Е.А. 26 марта 2020 года.

Равномерная сходимость несобственных интегралов (дополнение к видеосеминару М.В. Балашова №7) (1)

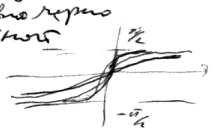
Функция $f(x,\alpha)$ называется равномерно ограниченной на $M \times A$, если

$\exists C>0 : \forall x \in M \ \forall \alpha \in A \to |f(x,\alpha)| \leq C$

а) $f(x,\alpha) = \alpha x^2$ не является равномерно ограниченной на $M=[0,1]$



б) $f(x,\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha x$ является равномерно ограниченной на $M=\mathbb{R}$



Несколько „классических" примеров

1) ин-л $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится неравномерно при $\alpha \in (1,+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad ; \quad \lim_{\alpha \to 1+0} \frac{1}{1-\alpha} = +\infty$$, это доказывает требуемое

2) Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ сходится а) равномерно на $[\alpha_0, +\infty)$, $\alpha > 0$
б) неравномерно на $(0,+\infty)$

а) сходится равномерно по признаку Дирихле, т.к.

$$\left| \int \sin \alpha x \, dx \right| = \frac{|\cos \alpha x|}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha_0} = C$$ – равномерно ограничена

$\frac{1}{x} \searrow 0$ (равномерно по α и монотонно)

б) можно расписать отрицание критерия Коши (попробуйте самостоятельно!), но для иллюстрации приведем другой способ.

пусть для $b>0$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = B$

оценим „хвост" ин-ла $\left| \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| \overset{t=\alpha x}{=} \left| \int_{\alpha \cdot \delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \underset{\uparrow}{=} B = \varepsilon_0$

$\forall \delta > 0 \ \exists \alpha = \frac{b}{\delta} \in (0,+\infty)$

Заметим следующий момент:

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ – этот интеграл не зависит от параметра и сходится.

Но существование замены, которая сводит ин-л с параметром к сходящемуся ин-лу без параметра не означает равномерной сходимости „исходного", хотя такая мысль может показаться естественной.

Полезно вспомнить следующий пример:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x}\, dx \quad , \alpha \neq 0$$

Этот интеграл не только не сходится равномерно, а расходится при всех α.

Запишем отрицание сходимости:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \xi_1 > \delta, \xi_2 > \delta \to \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\, dx \right| \geq \varepsilon_0$$

График подынтегральной функции это $\sin^2 \alpha x$, модулированный $\frac{1}{x}$. Выберем ξ_1 и ξ_2 так, чтобы на $[\xi_1, \xi_2]$ уместилось достаточное количество целых периодов $\sin^2 \alpha x$.

Например $\xi_1 = \frac{\pi}{\alpha} \cdot [\delta] + \delta$, $\xi_2 = \frac{\pi}{\alpha} \cdot 2[\delta] + \delta$

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sin^2 \alpha x}{x}\, dx \right| \geq \frac{1}{\xi_2} \underbrace{\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin^2 \alpha x\, dx \right|}_{= \frac{\pi}{2\alpha}[\delta]} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{[\delta]}{\frac{\pi}{\alpha} \cdot 2[\delta] + \delta} \underset{\substack{\text{при } \delta > 1 \\ 2[\delta] > \delta}}{\geq} \frac{\pi}{2\alpha} \frac{[\delta]}{\frac{\pi}{\alpha} \cdot 2[\delta] + 2[\delta]} = \frac{\pi}{4\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\pi + \alpha} = \frac{\pi}{4(\pi + \alpha)} = \varepsilon_0$$

Пример §14 №6(3)

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x - \alpha)^6} \quad , E_1 = (-\infty, 0], \quad E_2 = [0, +\infty)$$

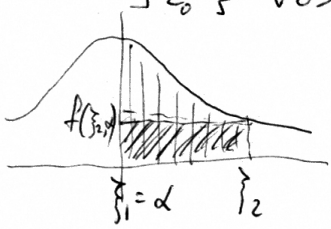
– На E_1 сходится равномерно по Вейерштрассу:

$$0 < \frac{1}{4 + (x - \alpha)^6} \leq \frac{1}{4 + x^6} \quad , \int_0^{+\infty} \frac{1}{4 + x^6}\, dx \text{ – сходится}$$

– На E_2 неравномерную сходимость можно доказать, рассуждая как в прошлом примере.

$f(x, \alpha)$ монотонно убывает при $x > \alpha$ и при этом знакопостоянна

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{5} \ \forall \delta > 0 \ \exists \xi_1 = \delta + 1, \xi_2 = \delta + 2, \exists \alpha = \delta + 1 \to \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{4 + (x - \alpha)^6} \right| \geq$$



$$\geq \frac{\xi_2 - \xi_1}{4 + (\xi_2 - \alpha)^6} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} = \varepsilon_0$$

Ещё один показательный пример:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx \quad , \ \alpha \geq \alpha_0 > 0$$

Если бы в признаке Дирихле не требовалась монотонность равномерно сходящегося к нулю множителя, то данный ин-л сходился бы равномерно.

Посмотрим, как обстоят дела "в действительности":

при $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \dfrac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}} = \dfrac{\sin x}{x^\alpha}\left(1 + \dfrac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right)$

Значит, в смысле сходимости исходный интеграл можно заменить эквивалентным:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,dx \sim \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}_{\text{сх. равн. по Дирихле}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\,dx}_{\boxed{\text{не сходится, если } \alpha \leq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)dx}_{\text{сх. равн. по В.}}$$

При $\alpha > \frac{1}{2}$ сх. равн. по В.

В данном примере использовали выделение „главной части",

$$I = I_1 + I_2$$

Если I_2 сходится равномерно и абсолютно, то характер сходимости I и I_1 один и тот же.

Пример: § 14 № 7(б)

$$I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad E = (0,2)$$

делаем очевидную замену $t = \frac{1}{x}$

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\, dt \; (=)$$

Признак Дирихле для данного и-ла неприменим. Действительно, ф-ция $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, но неравномерно по α: $\lim\limits_{t\to+\infty} \underbrace{\sup\limits_{\alpha\in(0,2)} \left|t^{\alpha-2}\right|}_{=1} = 1 > 0$

Значит, этот и-л надо исследовать иначе. Возьмём по частям

$$(=) \; -\frac{\cos t}{t^{2-\alpha}}\Big|_1^{+\infty} + (\alpha-2)\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\, dt}_{=: J_2}$$

Т.к. $\left|\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\right| \le \frac{1}{t^{3-\alpha}}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\alpha}}$ сходится, то J_2 сходится абсолютно и равномерно и характер сходимости исходного ин-ла будет определяться внеинтегральным слагаемым.

Если $I(\alpha)$ сходится равномерно, то из определения равномерной сходимости следует, что

$$\lim_{\xi\to+\infty} \left(-\frac{\cos t}{t^{2-\alpha(\xi)}}\Big|_{\xi}^{+\infty}\right) = \lim_{\xi\to+\infty} \left(\frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha(\xi)}}\right) = 0, \quad \forall \alpha(\xi) \in (0,2)$$

но предел числителя не существует а предел знаменателя при $\alpha(\xi) = 2 - \frac{1}{\xi}$ равен 1.

Таким образом, $I(\alpha)$ сходится неравномерно при $\alpha \in E$