

Задачи к теме "Несобственные интегралы, зависящие от параметров 02"

Умнов Е.А. 28 марта 2020 года.

Вычисление несобственных интегралов, зависящих от параметра. (дополнение к видеосеминару М.В. Баламнова №8) ⁽¹⁾

Далее будет полагать, что интегралы Дирихле, Лапласа и Пуассона известны (посмотрите все примеры с решениями в начале §15 задачи №1).

Так же особо обращаю внимание на разбор задачи §15 №2(1) в видеосеминаре №8 — там очень тщательно разобрана логика стандартных рассуждений в данном классе задач.

Рассмотрим примеры на формулу Фруллани (доказана в конце видеосеминара №6).

Пример: §15 1(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x} dx \stackrel{?}{=}, a > 0, b > 0$

Чтобы применить ф-лу Фруллани, нужно, чтобы исходный интеграл подходил под шаблон $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, a > 0, b > 0$,

чтобы $f(x)$ была непрерывна и

чтобы $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходился при $\forall A > 0$.

Как известно, $\int_A^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x} dx$ не сходится.

В этом случае смотрят сходимость ин-ла $\int_A^{+\infty} \frac{f(x) - f(+\infty)}{x} dx$, но $\cos^2 x$ не имеет конечного предела на $+\infty$ (или предельная формула).

Значит, сразу применить ф-лу Ф. здесь нельзя. Сначала преобразуем ин-л, потянув степень:

$$\stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos 2ax - 1 - \cos 2bx}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x} dx \stackrel{?}{=}$$

Ин-л $\int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx, A > 0$ сходится по признаку Дирихле, поэтому применим ф-лу Ф:

$$= \frac{1}{2} \cos 0 \cdot \ln \frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$$

Задача упомянуть, что исходный ин-л не имеет сходимости в т.ч. $x=0$. Подынтегральная ф-ция там не определена, но имеет конечный предел и может быть доопределена по непрерывности.

Пример: §15, N1(3)

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

Тут все довольно очевидно, изобразив данное выражение имеет вид $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{a}x) - f(\sqrt{b}x)}{x} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx$ скажется неопределенность

итого:

$$\equiv e^{-0} \cdot \ln \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$$

(e^{-x^2} непрерывна и $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится (ин-л Гаусса))
 $-\frac{1}{x}$ непрерывно дифф и монотонно убывает на $(0, +\infty)$)

Замечание: этот ин-л можно было найти и дифференцировав по параметру.
 (используйте самостоятелно в качестве упражнения)

Пример: §15, N2(6)

Используя интеграл Дирихле, вычислив данный ин-л:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^3} dx$$

В условии уже дана подсказка, что данный ин-л нужно свести к ин-лу Дирихле. Т.к. параметр в исходном ин-ле отсутствует, то нужно ввести его самим. Но делать это нужно аккуратно.

Тогда такой вариант: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^3} dx$, поскольку при $a \neq 1$ возникает особенность в нуле, которой нет у I .

Поэтому возьмем такой ин-л:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{ax \sin ax}{x^3} dx, \quad I(1) = I$$

(Замечание: поскольку параметр ввели мы сами, то и диапазон значений, который может принимать a , тоже можем выбрать какой "удобно". Пока положим $a > 0$),

$$I(a) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{ax \sin ax}{x^3} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{ax \sin ax}{x^3} dx}_{I_2} \quad I_1 - \text{содержит}$$

т.е. $I(a)$ сходится, примем равнотерно

$$f'_a(x, a) = \frac{1 - \cos ax}{x^2}, \quad |f'_a(x, a)| < \frac{2}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = \text{сх. раб. по } B.$$

т.е. $\int_1^{+\infty} f'_a(x, a) dx$ сх. равномерно и можно для $I(a)$ применить дифференцирование по параметру

$$I'_a(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2} \quad (\text{это ин-л из §14 N2(1), который мы вычисляли в предыдущем примере})$$

Тогда $I(a) = \frac{\pi}{4} a^2 + C$

(3)

"С найдем из непрерывности $I(a)$.

$$\lim_{a \rightarrow 0} I(a) = 0 \Rightarrow C = 0$$

наконец, $I = I(1) = \frac{\pi}{4}$

Замечание: параметр можно было ввести и по-другому

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cdot \frac{x - \sinh x}{x^3} dx, \quad \beta \geq 1$$

Такой интеграл возникает прямо с точки зрения исследования на всевозможные сходимость, неопределенности для решения, но, скорее всего, потребует более сложного счета.

Пример: §15, N13(4)

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\alpha x^2}}_{f(x, \alpha)} \underbrace{\operatorname{sh} \beta x}_{g(x, \beta)} dx, \quad \alpha > 0$$

Положим $\alpha > \varepsilon > 0$

$$|\beta| \leq B, \quad B > 0$$

т.е. $I(\alpha, \beta)$ при данных условиях сходится равномерно по α и β

Тогда $f(x, \alpha) = e^{\frac{(\frac{\varepsilon}{2} - \alpha)x^2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}x^2}$
 $g(x, \beta)$

Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \alpha) dx \leq \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}$ (т.е. сходится равномерно по α и β)

$h(x, \beta)$ начал с некоторого x начал убывать (с учетом ограниченности β)

Таким образом $I(\alpha, \beta)$ сходится при $\forall \beta$, $I'_\beta(\alpha, \beta)$ сходится равномерно относительно

Таким образом,

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \operatorname{sh} \beta x dx =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \operatorname{sh} \beta x \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\beta}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx = I$$

$$I'_\beta = \frac{\beta}{2\alpha} I, \quad \frac{dI}{I} = \frac{\beta}{2\alpha} d\beta \Rightarrow \ln I = \tilde{C}(\alpha) + \frac{\beta^2}{4\alpha}, \quad I = C(\alpha) e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

Заметим, что $I(\alpha, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ (интеграл Эйлера-Вассона)

Итого, с учетом того, что приведенные рассуждения верны $\forall \varepsilon > 0, \forall B > 0$
 $(\lim_{\beta \rightarrow 0} I(\alpha, \beta) = I(\alpha, 0))$

$$I(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad |\beta| < +\infty$$

4

Пример: § 15, № 15(2) $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$, $\alpha > 0$

положим $\alpha \geq \varepsilon > 0$
 $|\beta| \geq \varepsilon > 0$ $|I_{\alpha, \beta}| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx + \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \right|$
 Т.е. $I_{\alpha, \beta}$ с.р. непрерывно по α и β в ас. окрестности 0.

$I'_\alpha = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$, $|I'_\alpha| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2} dx = c\varepsilon$.

$I'_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ — с.р. непрерывно по непрерывной функции

Т.е. $I_{\alpha, \beta}$ можно дифф. и непрерывно и по α и по β производной есть производная от непрерывной

$I'_\alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Rightarrow I_{\alpha, \beta} = -\sqrt{\pi \alpha} + C_1(\beta)$

$I'_\beta = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sign } \beta \Rightarrow I_{\alpha, \beta} = \frac{\pi}{2} \cdot |\beta| + C_2(\alpha) \Rightarrow I_{\alpha, \beta} = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C$

$I(0, 0) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} I_{\alpha, \beta} = 0 = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C \right) \Rightarrow C = 0$

Замечание: необходимость $I_{\alpha, \beta}$ и I'_β можно обосновать в явном виде по непрерывности

Пример: § 15, № 15(5)

$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx$

Обычно, что $I_{\alpha, \beta}$ можно дифф. по β и

$I'_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\beta^2 + x^2)^2} 2\beta dx = -2\beta J(\alpha, \beta)$, где $J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\beta^2 + x^2)^2} dx$

Для вычисления этого ин-ла, воспользуемся ин-том Лапласа с дополнительным параметром

$I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx$, $|\beta| \leq \frac{1}{2}$

Тогда $I_{\alpha, \beta} = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|\alpha|}$ (проверьте самостоятельно!)

Т.е. $J(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\beta} I'_\beta = -\frac{1}{2\beta} \left(-\frac{\pi}{2\beta^2} e^{-\beta|\alpha|} - \frac{\pi|\alpha|}{2\beta} e^{-\beta|\alpha|} \right) = \frac{\pi}{4\beta^3} (1 + \beta|\alpha|) e^{-\beta|\alpha|}$

Наконец, $J(\alpha) = J(\alpha, 1) = \frac{\pi}{4} (1 + |\alpha|) e^{-|\alpha|}$

В качестве самостоятельного упражнения вычислите ин-л:

$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}} dx$, $\alpha > -1$