

Задачи к теме "Эйлеровы интегралы"

Умнов Е.А. 22 апреля 2020 года.

Эйлеровы интегралы
(дополнение к первой теме семинара М.В. Балакина и др.) (1)

Бета q -функция: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$. Функция определена при $p > 0$, $q > 0$

$B(p, q)$ может иметь и другое представление, одно из них всегда связать:

Сделаем замену $t = \frac{x}{1-x} \Rightarrow t(1-x) = x$
 $x = \frac{t}{1+t}$, $dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt \quad (*)$$

Рассмотрим несколько примеров на технику вычисления интегралов с помощью бета-функции.

Пример 1: §16.47(2)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)(1+x)^3}} = \\ &= \int_{-1}^2 (2-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{3}{2}} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{3}{t+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3t}{t+1}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{3 dt}{(t+1)^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{-3/4}}{t+1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}-1}}{(t+1)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} dt = B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Сделаем замену, чтобы привести интеграл к виду (*)

$$t = t(x), \quad t(-1) = 0, \quad t(2) = +\infty$$

$$t = \frac{1+x}{2-x} \quad \left| \begin{array}{l} (2-x)t = 1+x \\ x(1+t) = 2t-1 \end{array} \right. \quad dx = \frac{2t+2-2t+1}{(t+1)^2} = \frac{3 dt}{(t+1)^2}$$

$$x = \frac{2t-1}{t+1} \quad 1+x = \frac{3t}{t+1} \quad 2-x = \frac{3}{t+1}$$

В принципе, ответ уже получен. Но в данном конкретном случае есть возможность найти точное значение бета-функции

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \pi$$

Пример: §16 N8(5)

(2)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3} dx \quad (\Xi)$$

Здесь делается упрощающая замена $x(t)$. Такой способ замены в подынтегральном выражении приобретает вид $\sqrt{t} \cdot r(t)$, где $r(t)$ - дробно-рациональный ф-ция. Тогда при этом можно получить β -функцию.

Делаем дробно-рациональную замену, при этом нули числителя и знаменателя это нули множителей подынтегрального выражения.

$$t = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{t}{t+1}, \quad 1-x = \frac{1}{t+1}, \quad x+1 = \frac{2t+1}{t+1}$$

$$dx = \frac{t+1-t}{(t+1)^2} dt = \frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$\begin{aligned} (\Xi) \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{1/2} \left(\frac{2t+1}{t+1}\right)^{-3} \frac{dt}{(t+1)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{(2t+1)^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/2-1}}{(z+1)^{3/2+3/2}} d\left(\frac{z}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2^{3/2}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{2!} = \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{32} \end{aligned}$$

Пример: §16 N10(3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, \quad a \neq 0$$

сначала выполним предварительные упрощения, связавшие с параметром a (принимая во внимание, что исходный ин-л зависит от a):

$$= \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} \frac{\ln \frac{x}{|a|} + \ln |a|}{\frac{x^2}{a^2} + 1} d\left(\frac{x}{|a|}\right) = \frac{1}{|a|} \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt}_{I_1} + \underbrace{\ln |a| \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}}_{I_2} \right)$$

$$\frac{1}{|a|} I_2 = \frac{\ln |a|}{|a|} \arctg t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi \ln |a|}{2|a|}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению ин-ла

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln t^2}{t(t^2+t)} dt = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^{1/2}(u+1)} du = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{u^{1/2-1} \ln u}{u+1} du \end{aligned}$$

Рассмотрим ~~вспомогательный~~ ин-л

(3)

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1} \ln u}{u+1} du, \quad \alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$$

Тогда т.к. ин-л $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du$ и $\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1} \ln u}{u+1} du$ сходится равномерно по α , то

(Такой диапазон значений выбран потому, что в данном примере нас интересует $\alpha = \frac{1}{2}$ и чтобы $J(\alpha)$ был достаточно "хорошим" для нас)

(Этот ин-л разобран в видеосерии №3 М.В. Бекланова)

$$J(\alpha) = (B(\alpha, 1-\alpha))'_{\alpha} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi \alpha} \right)'_{\alpha} = -\frac{\pi}{\sin^2 \pi \alpha} \cdot \alpha \cdot \cos \pi \alpha$$

В свою очередь, $I_1 = \frac{1}{4} J(\frac{1}{2}) = 0$, т.е. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \ln |a|}{2|a|}, a \neq 0$

Следующий пример охватывает целый класс задач:

Пример: $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^s} \Leftrightarrow$ (без ограничений общности можно считать, что $n > 0$)

Теория предсказывает, что ин-л $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^s}$ "берется" в явном

из 3-х случаев: $s \in \mathbb{Z}$

В противном случае этот ин-л не выражается через элементарные

функции, т.е. ин-л найти удастся, если он сходится. $\left[\begin{array}{l} \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n} + s \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$ (р-сим.)

(В явном сходится при $m > -1$,

на бесконечности $I \sim \int x^{m-n s} dx$, сходится при $m-n s < -1$) $\Leftrightarrow \frac{m+1}{n} < s \Rightarrow s > 0$)

$$\Leftrightarrow a^{-s} \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+\frac{b}{a}x^n)^s} dx = \frac{a^{\frac{s+m+1}{n}}}{b^{\frac{s+m+1}{n}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^s} dt = K \cdot B\left(\frac{m+1}{n}, s - \frac{m+1}{n}\right)$$

$t = \frac{b}{a}x^n, \quad x = \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1} dt$

Рассмотрим относительно простой пример, иллюстрирующий данный случай:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

Данный ин-л "берется", но его первообразная имеет довольно громоздкий вид (см. задание Т2, §2 №4(2))

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C = F(x);$$

тогда $F(\infty) - F(0) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{9}$

Вместе с тем, данный неопределенный ин-л можно найти без использования первообразной:

(4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} \underset{\substack{t=x^3 \\ x=t^{1/3}, dx=\frac{1}{3}t^{-2/3}dt}}{=} \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/3-1}}{t+1} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Еще несколько простых примеров:

Пример: §16, N13(4)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} \underset{\substack{t=x^4 \\ x=t^{1/4}, dx=\frac{1}{4}t^{-3/4}dt}}{=} \frac{1}{4} \int_0^1 t^{1/4-1} (1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}\right)$$

Пример: §16, N14(5)

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx \underset{\substack{\sin x = \sqrt{t} \\ t > 0}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

$\alpha > -1, \beta > -1$

Пример: §16, N12(9)

$$\int_0^{\pi/2} \tan^{\alpha-1} x dx \underset{\substack{\tan x = \sqrt{t} \\ t > 0 \\ dx = \frac{1}{1+t} \frac{dt}{2\sqrt{t}}}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2}}}{t^{1/2}(1+t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{1}{2} B(\alpha, 1-\alpha) \textcircled{=}$$

$\alpha \in (0, 1)$

$$\textcircled{=} \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \quad \parallel \quad \text{т.к. } \alpha \in (0, 1), \text{ то } \ln - \text{н сходится}$$

Канонический пример "со звездочкой"

(5)

Пример: §16, N19(3)

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$$

Воспользуемся подстановкой $y = 1-x$, то $I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } I &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \Gamma(1-x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \frac{1}{2} \left(\ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x dx \right) \quad (\equiv) \end{aligned}$$

Далее нужно выполнить формулу, доказанную на основе из предыдущих занятий:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2} \quad a^2 + b^2 > 0$$

$$\begin{aligned} (\equiv) \quad \frac{1}{2} \left(\ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2t dt \right) &= \frac{1}{2} \left(\ln \pi - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \cos^2 t dt \right) \right) = \\ \pi x = 2t \quad x = \frac{2}{\pi} t & \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \pi - \ln 2 + \frac{2}{\pi} \cdot \pi \ln 2 \right) = \ln \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$