Тема "Интеграл и преобразование Фурье".

Умнов Е.А. 22 апреля 2020 года (испр. версия 29 апреля 2020 года) .

Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. 1
(дополнение к видеосеминарам Н.В. Балашова
№ 9 (после 30-минуты) и №10 (до 12:06 мин))

Рассмотрим более подробно получение интеграла Фурье.

Пусть $f(x)$ абс. инт. на отрезке $[-l, l]$, тогда можно выписать ряд Фурье этой ф-ции по следующей тригонометрической системе:

$$(*)\quad \left\{ 1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots \right\}$$

Полученный ряд будет приближать $f(x)$ либо на отрезке $[-l, l]$, либо на $\mathbb{R}$ (если $f(x)$ $2l$ периодична). Попробуем снять это ограничение, рассматривая $f(x)$ как функцию с периодом бесконечной величины.

Итак, выпишем разложение по системе $(*)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{\pi n}{l}t\,dt\cos\frac{\pi n x}{l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi n}{l}t\cos\frac{\pi n x}{l} + \sin\frac{\pi n t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}}_{\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)}\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\cos\frac{\pi n}{l}(x-t)\,dt \quad (**)$$

Чтобы сделать следующий шаг, положим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$ $(***)$
Тогда можно перейти к пределу $l \to +\infty$.
Первое слагаемое $(**)$ зануляется в силу $(***)$, а второе слагаемое $(**)$ рассматривать как интегральную сумму с равномерным разбиением положительной полуоси с мелкостью $\frac{\pi}{l}$ для функции

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt, \quad \omega = \frac{\pi n}{l}$$

В самом деле, если l рассматривать как фиксированный параметр, а $\omega \in (0, +\infty) \in \mathbb{R}$, то второе слагаемое $(**)$ представимо в виде:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\Delta_n|}_{\frac{\pi}{l}}\, F(\underbrace{\omega_n}_{\frac{\pi n}{l}\in\Delta_n})$$

; при $l \to +\infty$ мелкость этого разбиения стремится к нулю.

Итого,

$$\lim_{l\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt = \qquad (4)$$

Полученная „конструкция" и есть интеграл Фурье.
Введя обозначения „по аналогии": $a_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$

$b_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$

можно записать ин-л Фурье в виде:

$$= \int_0^{+\infty} (a_\omega \cos\omega x + b_\omega \sin\omega x)\,d\omega$$

Таким образом, если при разложении по системе (*) использовали только гармоники с частотой кратной $\frac{\pi}{l}$ – т.е. по дискретному спектру, то интеграл Фурье описывает разложение по спектру непрерывному.

Теперь получим комплексное представление ряда Фурье:
(используем чётность подынтегрального выражения (4) по ω)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt + \underbrace{\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)\,dt}_{=0 \text{ в силу нечётности синуса}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i(x-t)\omega}\,dt \qquad (5)$$

Примеры на вычисление интеграла Фурье представлены в видеосеминарах в достаточном количестве (задавайте вопросы, если есть непонятные случаи).

Вышеприведенные выкладки имеют еще то содержание, что если какая-то из формул ин-ла Фурье забудется, её не так сложно вывести.

Выражение (5) можно переписать следующим образом.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\omega}\,d\omega\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}\,dt \;\boxed{=} \qquad (6)$$

Внутренний интеграл называют преобразованием Фурье $f(x)$.

$$\hat{f}(\omega) = F[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\omega}\,dt \qquad (7)$$

Тогда (6) можно продолжить так:

$$\boxed{=}\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega = \hat{\hat{f}}(x) = F^{-1}[\hat{f}(\omega)](x) \qquad (8)$$

Выражение (8) очень похоже на (7) и называется обратным преобразованием Фурье.

О прикладном значении преобразования Фурье много сказано в видеосеминарах, здесь же рассмотрим еще один пример на эту тему:

Пример: $u'_t = u''_{xx}$, $u(x,0)=u_0(x)$, $x\in R$, $t\geqslant 0$ (ур-е теплопроводности)

Применим преобразование Фурье по переменной x, считая t параметром.

Для этого положим следующее:

— $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$, $u''_{xx}(x,t)$ абсолютно интегрируемы $\forall x\in R, \forall t\geqslant 0$

— $|u'_t| \leqslant f(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$

$$F[u''_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u''_{zz}\, e^{-iz\omega}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\underbrace{u'_z e^{-iz\omega}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'_z e^{-iz\omega}\, dz\Big) =$$ 4

т.к. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u'_x = 0$ в силу условия абс. инт.

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\Big(\underbrace{u\cdot e^{-iz\omega}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\cdot e^{-iz\omega}\, dz\Big) = (i\omega)^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\cdot e^{-iz\omega}\, d\omega}_{F[u] = V(t)}$$

С другой стороны, $F[u'_t] = \frac{d}{dt}F[u] = V'_t$

Итого, после преобразования Фурье ур-е в частных производных 2-го порядка „превратилось" в дифф. ур-е 1-го переменного t 1-го порядка:

$$V'_t = -\omega^2 V \Rightarrow V(t) = Ce^{-\omega^2 t}$$

$$V(0) = C = F[u_0(x)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(z)\, e^{-i\omega z}\, dz = V_0(\omega) \Rightarrow V(t) = V_0(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

Соответственно, $u(x,t) = F^{-1}[V(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V_0(\omega)\, e^{i\omega x - \omega^2 t}\, d\omega$

Найдём решение для начального условия $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(9) Тогда $V_0(\omega) = F[u_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot e^{-iz\omega}\, dz = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ (см. §17 N 8(2) - этот пример разобран в видеосеминаре N10)

и $V(t) = e^{-\omega^2(t+\frac{1}{2})}$

(10) $u(x,t) = F^{-1}[e^{-\omega^2(t+\frac{1}{2})}] = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{4t+2}}$

Интеграл (10) получается очень похожим на (9) и вычисляется по той же схеме.

Ответ: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\, e^{-\frac{x^2}{2(2t+1)}}$

Примеры на технику вычисления и св-ва преобразования представлены на видеосеминаре.