**Тема "Обобщенные функции".**

Умнов Е.А. 01 мая 2020 года .

Обобщенные функции. 1

(Дополнение к видеосеминарам №№10, 11 М.В.Балашова).

Понятие обобщённой функции, разделение на регулярные и сингулярные, определение предела в пространстве $D'$ и способы его вычисления весьма подробно рассмотрены в видеосеминарах.

Здесь же более обстоятельно рассмотрим „дифференцирование" обобщенных функций.

Напомним определение:

$$f' = (f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \;\boxed{=} \quad (1)$$

— Отсюда очевидное, но важное следствие — если $f$ — регулярна, а $f(x)$ непрерывно-дифференцируема, то

$$f' = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))'_x\,\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

— равенство (1) можно продолжить

$$\boxed{=}\; \underbrace{f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'), \text{ т.е.}$$

т.к. $\varphi(x)$ финитна

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \quad (3)$$

— операция „дифференцирования" линейна:

$$((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) = \alpha_1 (f_1', \varphi) + \alpha_2 (f_2', \varphi) \qquad (4)$$

— если обобщенная функция $g$ регулярна, а „порождающая" её функция $g(x)$ $n$ раз непрерывно дифференцируема, то для обобщённой производной верна „формула Лейбница".

Докажем для $n = 1$

$$(f\cdot g)' = ((f\cdot g)', \varphi) = -(f\cdot g, \varphi') \underset{\uparrow}{=} -(f, g\varphi') \;\boxed{=}\; \ldots$$

( далее используем регулярность $g$ и гладкость $g(x)$ )

$$\boxed{=}\; -(f, (g\cdot\varphi)' - g'\varphi) = (f, g'\varphi) - (f, (g\cdot\varphi)') =$$

$$= (fg', \varphi) + (f', g\cdot\varphi) = (fg', \varphi) + (f'g, \varphi) =$$

$$= (f\cdot g' + f'\cdot g, \varphi)$$

$$\text{т.е. } (f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g \qquad (5)$$

Теперь рассмотрим модельный пример:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & x \le 0 \\ \beta x, & x > 0 \end{cases}$$

Найти в $D'$ $f'$ и $f''$

$$f' = -(f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = -\alpha \int_{-\infty}^{0} x\cdot\varphi'(x)\,dx - \beta \int_{0}^{+\infty} x\cdot\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\alpha\Big(\underbrace{x\cdot\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} - \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx\Big) - \beta\Big(\underbrace{x\cdot\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}}_{=0} - \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\,dx\Big) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot\varphi(x)\,dx, \quad f'(x) = \begin{cases} \alpha, & x \le 0 \\ \beta, & x > 0 \end{cases} = \alpha + (\beta - \alpha)\theta(x)$$

$$f'' = -(f', \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = -\alpha\int_{-\infty}^{0}\varphi'(x)\,dx - \beta\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\alpha\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \beta\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} = (\beta-\alpha)\varphi(0) = (\beta - \alpha)\,\delta(x)$$

Что иллюстрирует данный пример? Если обобщенная функция $f$ порождается „непрерывно-дифф. функцией $f(x)$ (кроме одной точки, где ф-я непрерывна но имеет несовпадающие односторонние производные), то обобщенная производная $f'$ порождается „обычной" производной $f'(x)$, дополненной „в проблемной точке" скачком, величина которого соответствует разности значений односторонних производных в этой точке.

Если же в проблемной точке $f(x)$ испытывает разрыв 1-го рода со скачком значения $\beta - \alpha$, то у обобщенной производной появляется слагаемое $(\beta-\alpha)\delta(x)$.

Собственно, именно этому и посвящен пример §21 N 84 (решите самостоятельно).

Теперь применим полученные результаты для решения задач.

Пример 2: Т6 в)

Найти вторую производную в $D'$ для $|x|\cdot\sin x$.

Т.к. $\sin x$ дважды непрерывно-дифф, то можно применить „формулу Лейбница“

$$f'' = |x|''\cdot\sin x + 2|x|'\cdot(\sin x)' + |x|\cdot(\sin x)'' = \underbrace{2\delta(x)\cdot\sin x}_{\substack{0 \\ \text{т.к. } \sin 0 = 0}} + 2\cdot\operatorname{sign}x\cdot\cos x - |x|\cdot\sin x =$$

$$|x|' = \operatorname{sign}x$$

$$|x|'' = (\operatorname{sign}x)' = 2\delta(x)$$

$$= 2\cdot\operatorname{sign}x\cdot\cos x - |x|\cdot\sin x$$

Пример 3:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x<0 \\ (x+1)^3, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

(на самом деле, как доопределить в $x=0$ не имеет значения)

Найти $f'$ и $f''$ в $D'$.

Нарисуем график $f(x)$:

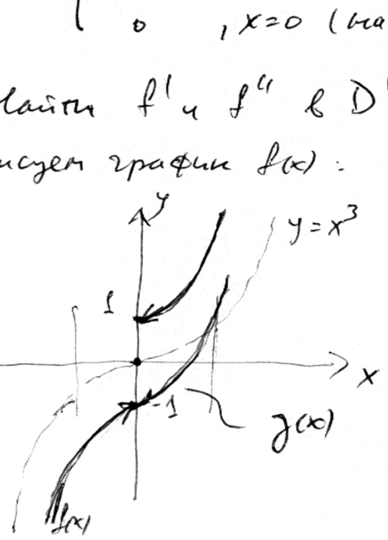


График $f(x)$ можно получить „вырезав“ кусок графика $y=x^3$ на промежутке $[-1,1]$ и „сдвинув“ графики того, что осталось, к нулю.

Итого, $f(x)$ — нечётная ф-ция с разрывом 1-го рода в $x=0$ со скачком величины 2.

Тогда, согласно №84 (§21) рассмотрим вспомогательную непрерывную ф-цию $g(x)$, которая будучи дополнена скачком в $x=0$ даёт $f(x)$.

$$f(x) = g(x) + 2\theta(x)$$

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x<0 \\ (x+1)^3-2, & x>0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

$$f' = g' + 2\delta(x), \quad g'(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2, & x<0 \\ 3(x+1)^2, & x>0 \\ 3, & x=0 \end{cases} = 3(x^2+1)+6|x|$$

$$f'' = g'' + 2\delta'(x), \quad g''(x) = \begin{cases} 6(x-1), & x<0 \\ 6(x+1), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases} = 6(x+\operatorname{sign}x)$$

Итого: $f' = 3(x^2+1)+6|x|+2\delta(x)$

$f'' = 6(x+\operatorname{sign}x)+2\delta'(x)$